XÁC ĐỊNH NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ ĐỨNG VÒM CYCLOID CHỊU NHIỀU TẢI TRỌNG TẬP TRUNG

NCS. **LÂM THANH QUANG KHẢI**
Trường Đại học Cửu Long

Tóm tắt: *Bài báo này trình bày cách xác định nội lực và chuyển vị đứng của vòm cycloid phẳng chịu nhiều tải trọng tập trung thẳng đứng theo phương pháp thế năng cực tiểu. Với cách xây dựng này, bài báo đã thiết lập được phiếm hàm cho bài toán vòm trong 2 trường hợp là khi xét lực dọc trục và khi xét mô men uốn với trục thực vòm dạng cong.*

Từ khoá: *nội lực, chuyển vị đứng, vòm cycloid, phương pháp thế năng cực tiểu.*

1. Đặt vấn đề

Trước đây để đơn giản hóa quá trình tính vòm, người ta sử dụng tính xấp xỉ bằng việc thay thế các đoạn vòm bằng các đoạn thẳng như phương pháp phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn,… Tất nhiên khi chia đoạn vòm thành các đoạn và xem các đoạn cong này như các đoạn thẳng dẫn đến độ chính xác không cao, đặc biệt độ chính xác càng giảm khi thanh có độ cong càng lớn. Mặt khác khi tính vòm hầu như người ta chỉ xét thành phần lực dọc trục mà đã bỏ qua mô men uốn trong quá trình tính toán.

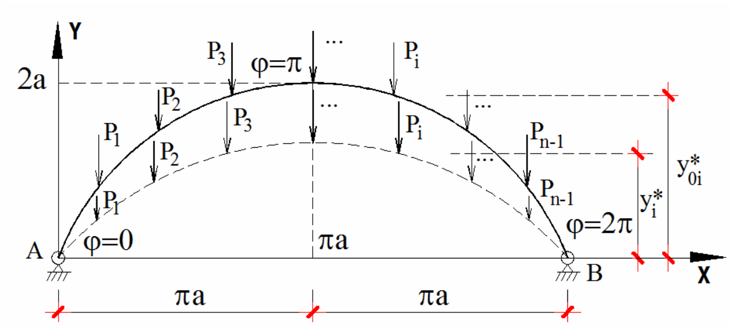
Về mặt lý thuyết tính các thanh vòm phẳng còn nhiều hạn chế do nhiều nguyên nhân khác nhau hay mức độ phức tạp của nó nên nhiều tác giả cũng như nhiều tài liệu chỉ nói rất ít hay trong quá trình phân tích, tính toán chỉ đưa ra phương pháp tính chung chung mà chưa tính toán cụ thể cho các công trình có những hình dạng nhất định.

Trong bài báo này, tác giả dùng trực tiếp độ dài của vòm là đường cong thực mà không xấp xỉ thành những đoạn thẳng gãy khúc và có xét đến sự ảnh hưởng của mô men uốn trong tính toán vòm.

Các vấn đề nghiên cứu về thanh cong đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trên cả hệ tĩnh và hệ động. Tuy nhiên, ý nghĩa khoa học của bài báo này ở chỗ đề xuất phương pháp tính nội lực và chuyển vị thẳng đứng cho bài toán vòm cycloid phẳng chịu nhiều tải trọng tập trung thẳng đứng theo phương pháp thế năng cực tiểu với trục thực vòm là đường cong mà không xấp đường cong thành những đoạn thẳng gãy khúc.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1 Thành lập công thức tính nội lực, chuyển vị đứng của vòm cycloid khi xét lực dọc trục [1]



Hình 1. *Vòm cycloid chịu nhiều tải trọng tập trung*

Ta chia vòm cycloid phẳng thành n đoạn bằng nhau, chịu $(n-1)$lực tập trung tác dụng. Lực P_i có phương thẳng đứng, hướng từ trên xuống.

Chiều dài vòm cycloid: $\sum_{i=1}^{n}\int_{S_{0i}} ds = 8a$ (đơn vị độ dài).

Ta thành lập công thức tính vòm theo phương pháp thế năng cực tiểu với trục thực vòm là đường cycloid khi xét lực dọc trục. Thế năng tổng cộng của vòm (hình 1):

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{S_{0i}}\frac{N_i^2}{EA}ds - \sum_{i=1}^{n-1}P_i.\left(y^*_{0i} - y^*_i\right) \Rightarrow \min$$

Với $S_{0i} = \dfrac{8a}{n}$: độ dài ban đầu của đoạn vòm thứ i trước khi biến dạng.

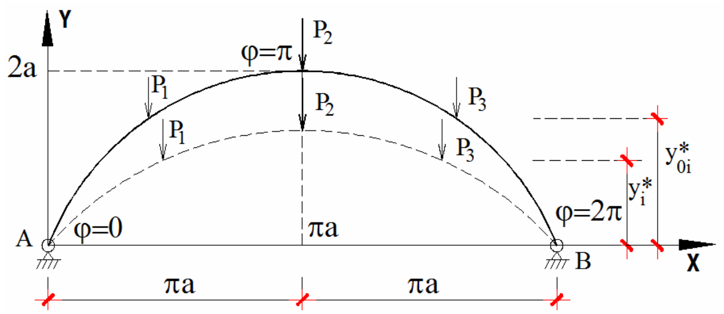
Dùng phương pháp thừa số Lagrange để đưa bài toán cực trị phiếm hàm với các điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc với phiếm hàm mở rộng:

$$\Pi = \frac{1}{2EA}\int_{0}^{S'_{01}} N_1^2 ds + \frac{1}{2EA}\int_{S'_{01}}^{S'_{02}} N_2^2 ds + \ldots + \frac{1}{2EA}\int_{S'_{0(n-1)}}^{S'_{0n}} N_n^2 ds -$$

$$-\left\{P_1.\left(y^*_{01} - y^*_1\right) + P_2.\left(y^*_{02} - y^*_2\right) + \ldots + P_{n-1}.\left(y^*_{0(n-1)} - y^*_{(n-1)}\right)\right\} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j \Rightarrow \min$$

Với $\lambda_j, \left(\lambda_j = \overline{1,m}\right)$ là thừa số Lagrange, cũng là ẩn của bài toán.

Để nghiên cứu, ta có chia vòm thành 4 đoạn bằng nhau chịu 3 lực tập trung P_i = P (hình 2):



Hình 2. *Vòm cyclid chịu 3 tải trọng tập trung*

$$\Pi = \frac{1}{2EA}\int_{0}^{2a}\left[N_1^2\right]ds + \frac{1}{2EA}\int_{2a}^{4a}\left[N_2^2\right]ds + \frac{1}{2EA}\int_{4a}^{6a}\left[N_3^2\right]ds + \frac{1}{2EA}\int_{6a}^{8a}\left[N_4^2\right]ds +$$

$$-\left\{P.\left[y^*_{01} - y^*_1\right] + P.\left[y^*_{02} - y^*_2\right] + P.\left[y^*_{03} - y^*_3\right]\right\} + \sum_{j=1}^{m}\left[\lambda_j\right]g_j \Rightarrow \min \qquad (1)$$

Tại A, B là các gối tựa cố định (không có chuyển vị đứng và ngang) nên điều kiện ràng buộc là $y_A = y_B = 0$ và tổng hình chiếu của các đoạn vòm đã biến dạng lên phương ngang x bằng $L = 2\pi a$.

$$g = \sqrt{\left[\left(1 - \frac{N_1}{EA}\right)2a\right]^2 - \left(y^*_1 - 0\right)^2} + \sqrt{\left[\left(1 - \frac{N_2}{EA}\right)2a\right]^2 - \left(y^*_2 - y^*_1\right)^2} +$$

$$+ \sqrt{\left[\left(1 - \frac{N_3}{EA}\right)2a\right]^2 - \left(y^*_3 - y^*_2\right)^2} + \sqrt{\left[\left(1 - \frac{N_4}{EA}\right)2a\right]^2 - \left(0 - y^*_3\right)^2} - 2\pi a = 0$$

Ta được hệ phương trình với các ẩn số: N_i, y^*_i, λ

Điều kiện cực trị (1): $\frac{\partial \Pi}{\partial N_i} = 0$; $\frac{\partial \Pi}{\partial y^*_i} = 0$; $\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0$

Từ đây ta sẽ có hệ phương trình với các biến là các thông số N_i, y^*_i, λ. Tác giả dùng chương trình Matlab để viết đoạn chương trình trên. Giả sử vòm có a=3, độ cứng dọc trục là EA=10^6 kN, tải trọng P=10 kN.

Giải ra ta được lực dọc trục, chuyển vị đứng của vòm:

Bảng 1. *Lực dọc trục và chuyển vị đứng khi xét lực dọc trục*

Điểm/đoạn	**Chuyển vị đứng tại các điểm** (m)	**Lực dọc trục trên từng đoạn** (kN)
1 $\left(S = 0 \div 2a\right)$	0.3	-19.56
2 $\left(S = 2a \div 4a\right)$	0.8	-13.51
3 $\left(S = 4a \div 6a\right)$	0.3	-13.51
$\left(S = 6a \div 8a\right)$		-19.56

Lưu ý: lực dọc mang dấu âm (chịu nén). Chuyển vị đứng mang dấu dương (hướng xuống)

2.2 Thành lập công thức tính nội lực, chuyển vị đứng của vòm cycloid khi xét mô men uốn [3]

Ta thành lập công thức tính vòm theo phương pháp thế năng cực tiểu với trục thực vòm là đường cycloid khi xét mô men uốn. Thế năng tổng cộng của vòm (hình 1):

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \int_{S_{0i}} \frac{M_i^2}{EI} ds - \sum_{i=1}^{n-1} P_i.\left(y_{0i}^* - y_i^*\right) \Rightarrow \min$$

Dùng phương pháp thừa số Lagrange để đưa bài toán cực trị phiếm hàm với các điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc với phiếm hàm mở rộng:

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^{S'_{01}} \left(\frac{d^2 y_1}{ds^2}\right)^2 .ds + \frac{EI}{2} \int_{S'_{01}}^{S'_{02}} \left(\frac{d^2 y_2}{ds^2}\right)^2 .ds + \ldots + \frac{EI}{2} \int_{S'_{0(n-1)}}^{S'_{0n}} \left(\frac{d^2 y_n}{ds^2}\right)^2 .ds -$$

$$-\left\{P_1.\left(y_{01}^* - y_1^*\right) + P_2.\left(y_{02}^* - y_2^*\right) + \ldots + P_{n-1}.\left(y_{0(n-1)}^* - y_{(n-1)}^*\right)\right\} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j \Rightarrow \min$$

Với λ_j, $\left(\lambda_j = \overline{1,m}\right)$ là thừa số Lagrange, cũng là ẩn của bài toán.

Để nghiên cứu, ta chia vòm thành 4 đoạn bằng nhau chịu 3 lực tập trung $P_i = P$ (hình 2):

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^{2a} \left[\frac{d^2 y_1}{ds^2}\right]^2 .ds + \frac{EI}{2} \int_{2a}^{4a} \left[\frac{d^2 y_2}{ds^2}\right]^2 .ds + \frac{EI}{2} \int_{4a}^{6a} \left[\frac{d^2 y_3}{ds^2}\right]^2 .ds + \frac{EI}{2} \int_{6a}^{8a} \left[\frac{d^2 y_4}{ds^2}\right]^2 .ds -$$

$$-\left(P.\left[y_{01}^* - y_{1,S=2a}\right] + P.\left[y_{02}^* - y_{2,S=4a}\right] + P.\left[y_{03}^* - y_{3,S=6a}\right]\right) + \sum_{j=1}^{m} \left[\lambda_j\right] g_j \Rightarrow \min \qquad (2)$$

Lập phương trình đường đàn hồi y_i của các đoạn vòm dưới dạng đa thức bậc 6 như sau:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + a_6 s^6 && \left(s = 0 \div 2a\right) \\
y_2 &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + b_5 s^5 + b_6 s^6 && \left(s = 2a \div 4a\right) \\
y_3 &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4 + c_5 s^5 + c_6 s^6 && \left(s = 4a \div 6a\right) \\
y_4 &= d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4 + d_5 s^5 + d_6 s^6 && \left(s = 6a \div 8a\right)
\end{aligned}$$

Vòm đang xét có 2 liên kết khớp tại các đầu mút. Do đó ta có độ võng tại các đầu mút này bằng không, từ đó ta có các ràng buộc:

$$y_{1,S=0} = 0 \Rightarrow g = a_0 = 0\,;\; y_{4,S=8a} = 0 \Rightarrow g_1 = y_{4,S=8a} = 0$$

Ngoài ra còn có điều kiện về tính liên tục của đường đàn hồi y và góc xoay β do mô men uốn tại vị trí có lực tập trung:

$$\begin{aligned}
y_{1,S=2a} &= y_{2,S=2a} \Leftrightarrow g_2 = y_{1,S=2a} - y_{2,S=2a} = 0 \\
y_{2,S=4a} &= y_{3,S=4a} \Leftrightarrow g_3 = y_{2,S=4a} - y_{3,S=4a} = 0 \\
y_{3,S=6a} &= y_{4,S=6a} \Leftrightarrow g_4 = y_{3,S=6a} - y_{4,S=6a} = 0 \\
\beta_{1,S=2a} &= \beta_{2,S=2a} \Leftrightarrow g_5 = \beta_{1,S=2a} - \beta_{2,S=2a} = 0 \\
\beta_{2,S=4a} &= \beta_{3,S=4a} \Leftrightarrow g_6 = \beta_{2,S=4a} - \beta_{3,S=4a} = 0 \\
\beta_{3,S=6a} &= \beta_{4,S=6a} \Leftrightarrow g_7 = \beta_{3,S=6a} - \beta_{4,S=6a} = 0
\end{aligned}$$

Điều kiện về mô men tại 2 gối của vòm có liên kết khớp bằng không.

$$M_{1,S=0} = 0 \Leftrightarrow g_8 = EI\left(\frac{d^2 y_{1,S=0}}{ds^2}\right) = 0\,;\; M_{4,S=8a} = 0 \Leftrightarrow g_9 = EI\left(\frac{d^2 y_{4,S=8a}}{ds^2}\right) = 0$$

Thế các điều kiện ràng buộc vào phương trình (2), ta được hệ phương trình với các ẩn số: a_i, b_i, c_i, d_i, λ_j

Điều kiện cực trị (2): $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$; $\dfrac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0$; $\dfrac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0$; $\dfrac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0$; $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \lambda_j} = 0$

Từ đây ta sẽ có hệ phương trình với các biến là các thông số a_i, b_i, c_i, d_i, λ_j để xác định các phương trình đường đàn hồi y_i. Tác giả dùng chương trình Matlab để viết đoạn chương trình trên. Giải ra ta được phương trình đường đàn hồi của các đoạn vòm:

$$y_1 = \frac{10Pa^2}{EI}.s - \frac{P}{4EI}.s^3 \qquad (s = 0 \div 2a)$$

$$y_2 = \frac{-4Pa^3}{3EI} + \frac{12Pa^2}{EI}.s - \frac{Pa}{EI}.s^2 - \frac{P}{12EI}.s^3 \qquad (s = 2a \div 4a)$$

$$y_3 = \frac{-12Pa^3}{EI} + \frac{20Pa^2}{EI}.s - \frac{3Pa}{EI}.s^2 + \frac{P}{12EI}.s^3 \qquad (s = 4a \div 6a)$$

$$y_4 = \frac{-48Pa^3}{EI} + \frac{38Pa^2}{EI}.s - \frac{6Pa}{EI}.s^2 + \frac{P}{4EI}.s^3 \qquad (s = 6a \div 8a)$$

Kết quả mô men uốn, lực cắt và chuyển vị đứng trình bày ở bảng sau:

Bảng 2. *Mô men uốn, lực cắt và chuyển vị đứng khi xét mô men uốn*

Điểm/đoạn	Mô men uốn tại các điểm	Lực cắt trên các đoạn	Chuyển vị đứng tại các điểm
1 $(S = 0 \div 2a)$	$-3Pa$	$\frac{-3P}{2}$	$\frac{18Pa^3}{EI}$
2 $(S = 2a \div 4a)$	$-4Pa$	$\frac{-P}{2}$	$\frac{76Pa^3}{3EI}$
3 $(S = 4a \div 6a)$	$-3Pa$	$\frac{P}{2}$	$\frac{18Pa^3}{EI}$
$(S = 6a \div 8a)$		$\frac{3P}{2}$	

3. Kết luận

- Tác giả đã xây dựng được phương pháp tính nội lực và chuyển vị thẳng đứng của vòm cycloid phẳng chịu nhiều tải trọng tập trung thẳng đứng theo phương pháp thế năng cực tiểu với trục thực vòm là đường cong với 2 trường hợp: khi xét lực dọc trục và khi xét mô men uốn;

- Tác giả có thể sử dụng phương pháp đề xuất này để tính nội lực cho các loại vòm khác như: vòm tròn, vòm parabol;...

- Hạn chế của phương pháp tính này là phải tìm được trục của đường cong hay nói khác đi phải tìm được độ dài của cung vòm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. PHẠM VĂN TRUNG, Phương pháp mới tính toán hệ kết cấu dây và mái treo. *Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội, 2006.*
2. NGUYỄN TRÂM, Phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn. *Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2012.*
3. VŨ THANH THỦY, Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ thanh chịu uốn khi xét tới ảnh hưởng của biến dạng trượt. *Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội, 2010.*
4. SEUNG KYU LEE, BRIAN MACE, MICHAEL BRENNAN, In-plane free vibrations of curved beams. *15th International Congress on sound and vibration, Korea, 2008.*
5. PETER I. KATTAN, Matlab guide to finite elements. *An Interactive Approach, Second editor, Springer, New York, USA, 2006.*