LỰC NÚT TƯƠNG ĐƯƠNG BÊN TRONG CỦA PHẦN TỬ ỨNG SUẤT PHẲNG TRONG BÀI TOÁN PHẦN TỬ HỮU HẠN PHI TUYẾN

ThS. **NGUYỄN ĐẠI VIÊN**
Sở Xây dựng Thừa Thiên Huế

1. Đặt vấn đề

Trong thực tế tính toán kết cấu, chúng ta thường phải phân tích bài toán phi tuyến. Bài toán này đưa về giải phương trình chứa các số hạng phi tuyến đối với ẩn số. Nói chung, không thể giải một cách chính xác dưới dạng đóng những phương trình phi tuyến mà phải dùng các thuật toán đúng đắn, trong đó tiêu chuẩn hội tụ là vấn đề cần quan tâm.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), tải trọng tác dụng lên hệ được thay thế gần đúng bằng một hệ lực đặt tại các nút của phần tử (gọi là lực nút tương đương bên ngoài). Tương tự, các thành phần ứng suất của hệ có thể được thay thế gần đúng bằng một hệ lực đặt tại các nút của phần tử (tạm gọi là lực nút tương đương bên trong).

Theo nguyên tắc cân bằng của hệ thì hai hệ lực này phải cân bằng nhau. Tuy nhiên, trong các bước lặp của bài toán phân tích phi tuyến, sự chênh lệch giữa hai hệ lực này luôn tồn tại và có xu hướng giảm dần khi số vòng lặp tăng lên. Khi độ chênh lệch này nhỏ hơn một giá trị quy định, ta nói bài toán hội tụ.

Bài báo nhằm xác định lực nút tương đương bên trong của phần tử chữ nhật trong trạng thái ứng suất phẳng. Đây là dạng bài toán có phạm vi ứng dụng tương đối rộng rãi trong ngành xây dựng, chế tạo máy bay, đóng tàu...

2. Cơ sở lý thuyết

a. Phương trình cân bằng của hệ PTHH ở vòng lặp i có thể viết:

$$R^i - F^i = 0 \qquad (1)$$

Trong đó: R^i và F^i là véctơ lực nút tương đương bên ngoài và bên trong của hệ ở vòng lặp *i*.

Giả sử lời giải tại vòng lặp *i* đã biết, cần xác định lời giải tại vòng lặp (*i*+1).

Viết lại (1) cho vòng lặp (*i*+1):

$$R^{i+1} - F^{i+1} = 0 \qquad (2)$$

Vì lời giải tại vòng lặp i đã biết nên ta có:

$$F^{i+1} = F^i + F \qquad (3)$$

Với *F* là số gia lực nút tương đương bên trong.

Mặt khác, véctơ *F* có thể được viết:

$$F = K^i.U \qquad (4)$$

Trong đó: K^i là ma trận độ cứng của hệ ở vòng lặp thứ *i* và *U* là véctơ gia số chuyển vị nút.

Thay (3), (4) vào (2):

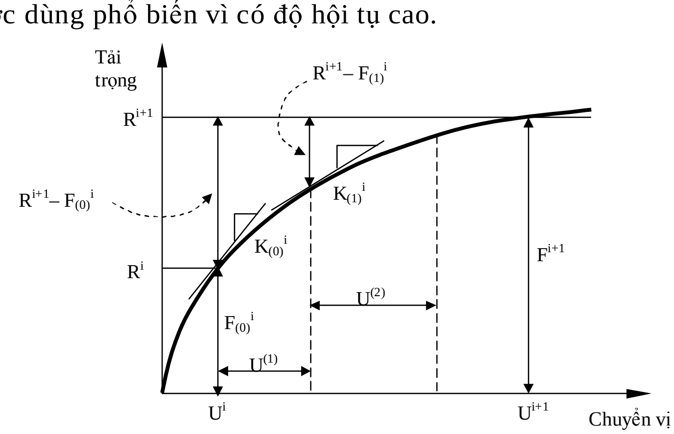
$$K^i.U = R^{i+1} - F^i \qquad (5)$$

Từ đó, tính được chuyển vị tại vòng lặp *i*+1:

$$U^{i+1} = U^i + U \qquad (6)$$

Với *U* là nghiệm của (5).

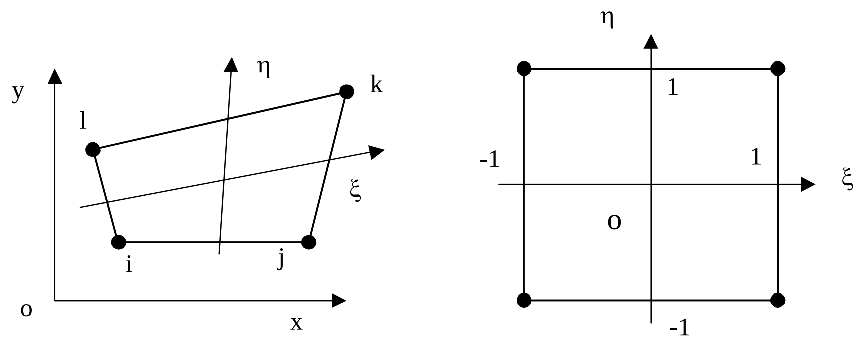
Vòng lặp trên đây được dùng cho nhiều phương pháp khác nhau. Trong đó, phương pháp Newton-Raphson (xem hình 1) được dùng phổ biến vì có độ hội tụ cao.



Hình 1. *Phương pháp lặp Newton - Raphson*

Nghiệm của (5) là chuyển vị gây ra bởi hiệu số giữa *lực nút tương đương bên ngoài ở vòng lặp đang xét* và *lực nút tương đương bên trong ở vòng lặp trước*. Do vậy, việc xác định lực nút tương đương bên trong tại mỗi vòng lặp là vấn đề cần thiết đối với việc giải bài toán PTHH phi tuyến theo phương pháp lặp.

b. Xét phần tử tứ giác 4 nút định vị trong hệ tọa độ *Oxy*, có trạng thái ứng suất phẳng. Để tiện tính toán, ta sử dụng phần tử tham chiếu định vị trong hệ toạ độ $O\xi\eta$. Trong hệ này, các thành phần toạ độ ξ và η của những điểm trên phần tử tham chiếu mang các giá trị trong đoạn [-1, 1] (xem hình 2a và 2b).



Hình 2a. *Phần tử thực* **Hình 2b.** *Phần tử tham chiếu*

Mối quan hệ giữa tọa độ một điểm *M(x,y)* của phần tử thực trong hệ *Oxy* và điểm tương ứng $M'(\xi,\eta)$ của phần tử tham chiếu trong hệ $O\xi\eta$:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta).x_i \\ y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta).y_i \end{cases} \qquad (7)$$

Với N_i là các hàm dạng của phần tử.

c. Lực nút tương đương bên trong của phần tử theo [1]:

$$\{F_e\} = \int_v [B]^T.\{\sigma_e\}.dv \qquad (8)$$

Trong đó: $[B]$ là ma trận đạo hàm; $\{F_e\}$ gồm các thành phần lực nút tương đương theo phương x, y của các nút.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để tính được (8) khi kết quả của bài toán PTHH không phải là các hàm ứng suất mà là các trị số ứng suất rời rạc tại các điểm nút:

$$\{\sigma_e\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

d. Thay vi phân thể tích *dv* bởi (*e dx dy*), với *e* là chiều dày phần tử; (8) trở thành:

$$\{F_e\} = \int_s [B]^T.\{\sigma_e\}.e.dx.dy \qquad (10)$$

Với quan hệ (7), đổi biến số trong tính tích phân kép với:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\mu) \end{cases} \Rightarrow \{F_e\} = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta [B]^T.\{\sigma\}.|J|.d\xi.d\eta \qquad (11)$$

Với *J* là ma trận Jacobi.

Trường hợp phần tử chữ nhật:

$$\begin{cases} \alpha = \gamma = -1 \\ \beta = \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \{F_e\} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T.\{\sigma\}.|J|.d\xi.d\eta \qquad (12)$$

Tích phân (12) có thể tính gần đúng bằng phương pháp Gauss:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \approx \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} w_i . w_j . f(\xi_i,\eta_j) \qquad (13)$$

Với:

(ξ_i, η_j) - Tọa độ các điểm Gauss nằm trên diện tích của phần tử tham chiếu, có giá trị thuộc đoạn [-1,1];

w_i, w_j - Trọng số ứng với điểm Gauss có tọa độ (ξ_i, η_j);

r - Số điểm Gauss nằm trên một phương ξ hoặc η.

Ta chọn r = 2 thì tọa độ điểm Gauss là ± 0,577350269189626 và trọng số tương ứng là 1.

Như vậy, ta có thể tính được lực nút tương đương bên trong của phần tử từ ứng suất tại các nút theo (13).

Ghép các lực nút tương đương bên trong của các phần tử $\{F_e\}$, ta sẽ có ma trận lực nút tương đương bên trong của hệ $\{F\}$.

3. Ví dụ

Xét vách cứng chịu tải trọng ngang, liên kết ngàm ở chân có kích thước như hình 3. Vật liệu có môđun đàn hồi E = 2,65.10^9 KG/m^2; hệ số poisson là 0,3.

- Chia hệ thành 4 phần tử và đánh số nút và phần tử như hình 3.
- Ma trận lực nút tương đương bên ngoài từ tải trọng đã cho:

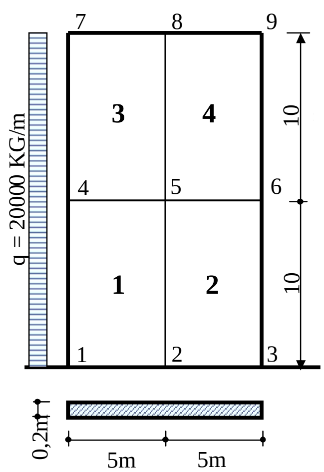
$$\{R\}^T = \{r_{1x} \quad r_{1y} \quad r_{2x} \quad r_{2y} \quad r_{3x} \quad r_{3y} \quad r_{4x} \quad r_{4y} \quad r_{5x} \quad r_{5y} \quad r_{6x} \quad r_{6y} \quad r_{7x} \quad r_{7y} \quad r_{8x} \quad r_{8y} \quad r_{9x} \quad r_{9y}\}$$

$$\{R\}^T = \{10000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 20000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

- Lập trình và tính toán theo tích phân (13), ta có ma trận lực nút tương đương bên trong:

$$\{F\}^T = \{f_{1x} \quad f_{1y} \quad f_{2x} \quad f_{2y} \quad f_{3x} \quad f_{3y} \quad f_{4x} \quad f_{4y} \quad f_{5x} \quad f_{5y} \quad f_{6x} \quad f_{6y} \quad f_{7x} \quad f_{7y} \quad f_{8x} \quad f_{8y} \quad f_{9x} \quad f_{9y}\}$$

$$\{F\}^T = \{-12318 \ -40378 \ -1541 \ 756 \ -16140 \ 39621 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$



Hình 3. *Ví dụ*

Nhận xét:

- Tại các nút không có liên kết (4, 5, 6, 7, 8, 9): $\{R\}$ và $\{F\}$ cân bằng nhau;
- Lực nút tương đương bên ngoài r_{1x} thực ra không gây ra nội lực trong hệ. Do vậy, cộng giá trị r_{1x} vào f_{1x} của $\{F\}$, ta có:

$$\{F^*\}^T = \{-22318 \ -40378 \ -1541 \ 756 \ -16140 \ 39621 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

Lúc này, các giá trị f_{ix}, f_{iy} (i = 1÷3) chính là các phản lực của hệ tại các nút liên kết.

4. Kết luận

- Lực nút tương đương bên trong có thể tính từ các giá trị ứng suất rời rạc tại các điểm nút của hệ bằng phương pháp gần đúng Gauss.
- Trong quá trình giải bài toán đàn hồi phi tuyến theo phương pháp lặp, giữa ma trận lực nút tương đương bên ngoài ở vòng lặp hiện tại luôn có chênh lệch với ma trận lực nút tương đương bên trong ở vòng lặp trước. Giá trị chênh lệch này được dùng làm tiêu chuẩn hội tụ để giải bài toán phi tuyến theo phương pháp lặp.
- Khi bài toán hội tụ, ta nhận được ma trận lực nút tương đương bên trong gồm các thành phần:

    + Tại các nút không có liên kết: ma trận lực nút tương đương bên trong (do nội lực) là cân bằng với ma trận lực nút tương đương bên ngoài (do ngoại lực).

    + Tại các nút có liên kết: các số hạng của ma trận lực nút tương đương bên trong chính là phản lực của hệ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. Y. H. BANGASH. Concrete and conrete structures: Numerical modelling and Application. *Elsevier science publisher Ltd. 1989.*
2. HỒ ANH TUẤN - TRẦN BÌNH. Phương pháp phần tử hữu hạn. *NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 1978.*