

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC

TS. TRẦN VĂN LIÊN

Trường Đại học Xây dựng

1. Mở đầu

Trong lĩnh vực công trình, ổn định là tính chất của công trình có khả năng giữ được vị trí ban đầu hoặc giữ được dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng. Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là *mất ổn định*. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là *trạng thái giới hạn* của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là *tải trọng tới hạn*. Việc xác định tải trọng tới hạn là một trong những nhiệm vụ chính khi xét ổn định của công trình.

Để xác định lực tới hạn (hay tham số của lực tới hạn), người ta đã xây dựng nhiều phương pháp khác nhau xuất phát từ các tiêu chuẩn cân bằng về ổn định, tức là các dấu hiệu mà tương ứng với nó thì hệ ở trạng thái tới hạn. Mỗi tiêu chuẩn đều có một phạm vi áp dụng của nó [2, 5, 6].

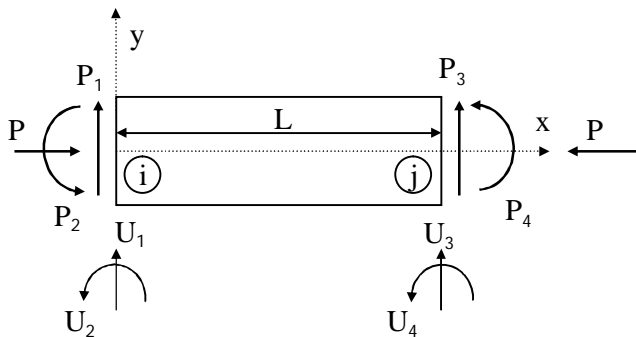
Tiêu chuẩn cân bằng ổn định dạng cân bằng của các hệ biến dạng dưới dạng động lực học gắn liền với định nghĩa ổn định chuyển động của Liapunov cho các bài toán ổn định dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng. Tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu khuynh hướng chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng ban đầu bằng một nhiễu loạn nào đó. Nếu hệ dao động tắt dần hay trở về trạng thái ban đầu thì sự cân bằng là ổn định, ngược lại là không ổn định.

Tuy phức tạp nhưng tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học được xem là đầy đủ và tổng quát, giải quyết được các bài toán ổn định mà các tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học không thể giải quyết được [5, 6]:

- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực bảo toàn thường gặp trong các công trình xây dựng, thì về nguyên tắc các tiêu chuẩn trên đều dẫn đến cùng một kết quả.
- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn thì nhất định phải sử dụng các tiêu chuẩn động lực học.

Trong bài báo này, tác giả trình bày việc áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực (MTĐCĐL) [1, 3] vào việc xác định lực tới hạn gây mất ổn định của các kết cấu thanh chịu nén bởi các lực bảo toàn và không bảo toàn theo tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học. Đây là cơ sở để áp dụng phương pháp MTĐCĐL vào các bài toán ổn định hệ thanh phức tạp hơn, được xử lý bằng các chương trình tính toán hiện đại, áp dụng các phương pháp tính toán bằng số.

2. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu uốn có kể đến ảnh hưởng của lực dọc



Hình 1. Phần tử thanh chịu uốn và nén dọc

Chọn hàm dạng là nghiệm bài toán dao động tự do của thanh thẳng chịu uốn có xét đến ảnh hưởng của lực dọc P không đổi (hình 1).

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho A \omega^2 y \quad (1)$$

trong đó $P > 0$ nếu phần tử thanh chịu nén, $P < 0$ nếu phần tử thanh chịu kéo. Nghiệm của bài toán này có dạng:

$$y(x) = [N(x)] \{u_e\} \quad (2)$$

với các hàm dạng là:

$$[N] = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \zeta \\ \sin \alpha \zeta \\ \cosh \alpha \zeta \\ \sinh \alpha \zeta \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta^2 - F_4 & F_2 L & -F_3 & F_1 L \\ -F_6 / \alpha & (\alpha + F_4 / \alpha) L & -F_5 / \alpha & -F_3 L / \alpha \\ \alpha^2 + F_4 & -F_2 L & F_3 & -F_1 L \\ F_6 / \beta & (\beta - F_4 / \beta) L & F_5 / \beta & F_3 L / \beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

trong đó:

- $\zeta = x/L$ là tham số chiều dài không thứ nguyên.
- ω là tần số dao động (rad/giây), $\omega=0$ tương ứng với bài toán tĩnh.

$$\sigma \text{ là tham số kể đến ảnh hưởng của lực dọc: } \sigma = \frac{PL^2}{EI} \quad (4)$$

$$\lambda \text{ là tham số động lực học: } \lambda = \omega L^2 \times \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (5)$$

α, β là các tham số:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}}; \beta = \sqrt{-\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}} \quad (6)$$

Các hàm số F_i được định nghĩa như sau :

$$\begin{aligned} F_1 &= (\beta \sin \alpha - \alpha \sinh \beta)(\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\ F_2 &= (\alpha \cos \alpha \sinh \beta - \beta \sin \alpha \cosh \beta)(\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\ F_3 &= (\cos \alpha - \cosh \beta) \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) / \delta \\ F_4 &= [(\beta^2 - \alpha^2)(\cos \alpha \cosh \beta - 1) + 2\alpha \beta \sin \alpha \sinh \beta] \alpha \beta / \delta \\ F_5 &= (\beta \sinh \beta + \alpha \sin \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta / \delta \\ F_6 &= -(\alpha \cosh \beta \sin \alpha + \beta \sinh \beta \cos \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta / \delta \end{aligned} \quad (7)$$

Khi đó ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn có kể đến ảnh hưởng của lực dọc có dạng :

$$\hat{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4 L & F_5 & F_3 L \\ -F_4 L & F_2 L^2 & -F_3 L & F_1 L^2 \\ F_5 & -F_3 L & F_6 & F_4 L \\ F_3 L & F_1 L^2 & F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. Ổn định thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng (lực bảo toàn)

3.1. Phương pháp giải tích

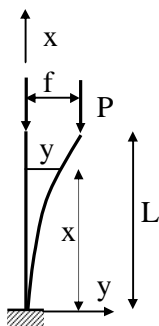
Xét bài toán ổn định của thanh công xôn có mômen quán tính chính I , môđun đàn hồi E , khối lượng phân bố đều trên một đơn vị chiều dài ρA . Thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng P là lực bảo toàn mang giá trị dương nếu phần thanh bị nén (hình 2). Phương trình dao động của hệ có dạng [4]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

với các điều kiện biên tại đầu ngàm:

$$y(0, t) = 0; \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

và tại đầu tự do:



Hình 2.

$$\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = -\frac{P}{EI} \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} \quad (11)$$

Bằng cách đặt:

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t} \quad (12)$$

trong đó $Y(x)$ là hàm số chưa biết; ω là hằng số chưa biết, nói chung là một số phức. Ta đưa phương trình (9) về phương trình dạng (1) với nghiệm tổng quát:

$$Y(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (13)$$

Thay (13) vào (10) – (11) và từ điều kiện các hằng số tích phân C_i không đồng thời bằng không, ta nhận được phương trình đặc trưng xác định lực tới hạn:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha^2 \sin \alpha & -\alpha^2 \cos \alpha & \beta^2 \sinh \beta & \beta^2 \cosh \beta \\ (\sigma\alpha - \alpha^3)\cos \alpha & (-\sigma\alpha + \alpha^3)\sin \alpha & (\sigma\beta + \beta^3)\cosh \beta & (\sigma\beta + \beta^3)\sinh \beta \end{pmatrix} = 0$$

hay là:

$$\Delta(\sigma, \lambda) = 2\lambda^2 - \sigma\lambda \sin \alpha \sinh \beta + (\sigma^2 + 2\lambda^2)\cos \alpha \cosh \beta = 0 \quad (14)$$

3.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Xem thanh là một phần tử, khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực theo điều kiện biên ngàm tại nút $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$, từ (8) ta nhận được: $\hat{K}^*(\omega, P)\hat{U}^*(\omega) = \hat{F}^*(\omega)$ (15)

trong đó $\hat{K}^*(\omega, P)$ là ma trận độ cứng động lực rút gọn:

$$\hat{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Trong bài toán này, lực P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không $\hat{F}^*(\omega) = 0$. Khi đó, phương trình (15) trở thành:

$$\hat{K}^*(\omega, P)\hat{U}^*(\omega) = 0 \quad (17)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng dẫn đến sự tăng dần biên độ chuyển động, tức là khi $\hat{U}^*(\omega) \neq 0$. Như vậy, hệ sẽ mất ổn định khi định thức ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không:

$$\det \hat{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \det \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

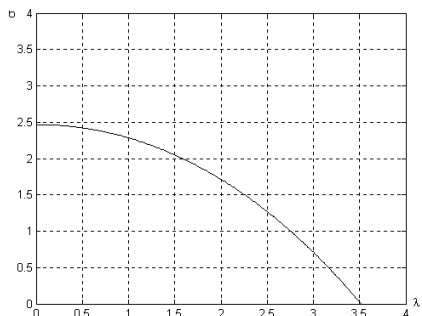
do đó ta nhận được phương trình xác định lực tới hạn: $F_6 \cdot F_2 - F_4^2 = 0$ (19)

Sử dụng các đồng nhất thức:

$$\alpha\beta = \lambda; \alpha^2 - \beta^2 = \sigma; (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\sigma^2 + 4\lambda^2); \sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

Sau một số biến đổi, ta nhận được:

$$F_6 F_2 - F_4^2 = -\frac{\lambda}{\delta} [2\lambda^2 - \sigma\lambda \sin \alpha \sinh \beta + (\sigma^2 + 2\lambda^2)\cos \alpha \cosh \beta] = 0 \quad (20)$$



Hình 3. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

dẫn đến phương trình (14) mà ta đã lập bằng phương pháp giải tích, tức là cách giải theo phương pháp MTĐCĐL và phương pháp giải tích cho cùng một kết quả.

3.3. Xác định lực tới hạn

Từ (14) hay (20), ta nhận thấy:

- Khi không có lực P thì $\sigma=0$, nghiệm λ của phương trình (14) là số thực, nó tương ứng với tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén. Khi tăng giá trị

tham số tải trọng đến giá trị $\sigma^* = 2,4674 = \pi^2/4$, tham số λ dần về 0 (hình 3) tương ứng với tải trọng tới hạn:

$$P_{th}^* = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (21)$$

- Khi σ tiếp tục tăng, nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Khi đó tần số ω cũng là số phức có dạng $\omega = a + ib$. Từ (12), ta có:

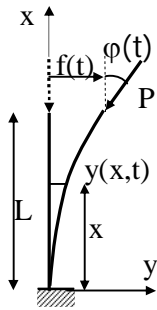
$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t} = Y(x)e^{i(a+ib)t} = Y(x)e^{(ia-b)t}$$

Như vậy, khi $b < 0$, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, do đó, theo tiêu chuẩn động lực học, thanh công xôn chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng sẽ bị mất ổn định khi $\sigma = \sigma^*$, tương ứng với tải trọng tới hạn (21). Kết quả tìm được trùng với kết quả đã biết theo tiêu chuẩn tĩnh học từ SBVL.

4. Ổn định của thanh chịu nén bởi lực đẩy (lực không bảo toàn)

4.1. Phương pháp giải tích

Xét bài toán ổn định của thanh công xôn có mômen quán tính chính I , mô đun đàn hồi E , khối lượng phân bố đều trên một đơn vị chiều dài ρA chịu nén bởi lực đẩy P (hình 4). Ta có phương trình dao động của thanh (9) với điều kiện biên tại đầu ngàm (10) với các điều kiện biên tại đầu tự do là



Hình 4.

$$\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (22)$$

Bằng cách đặt tương tự (12), từ điều kiện các hằng số tích phân không đồng thời bằng không, ta nhận phương trình đặc trưng xác định lực tới hạn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha^2 \sin \alpha & -\alpha^2 \cos \alpha & \beta^2 \sinh \beta & \beta^2 \cosh \beta \\ -\alpha^3 \cos \alpha & \alpha^3 \sin \alpha & \beta^3 \cosh \beta & \beta^3 \sinh \beta \end{pmatrix} = 0$$

hay là:

$$\Delta(\beta, \omega) = \sigma^2 + 2\lambda^2 + \sigma\lambda \sin \alpha \sinh \beta + 2\lambda^2 \cos \alpha \cosh \beta = 0 \quad (23)$$

4.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Đối với thanh chịu nén bởi lực đẩy đặt tại nút 2 ($x=L$), lực cắt tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng:

$$\bar{Q}_3 e^{i\omega t} = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t) = Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = Q_3 e^{i\omega t} + P \frac{\partial N(L, \omega)}{\partial x} \{u\} e^{i\omega t} \quad (24)$$

Khi đó, phương trình (15) có dạng:

$$\bar{K}(\omega, P) \bar{U}(\omega) = \left[\hat{K}(\omega, P) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \frac{\partial N(L, \omega)}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bar{U}(\omega) = \bar{F}(\omega) \quad (25)$$

Ta nhận được ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu lực đẩy đặt tại nút 2 ($x=L$) có dạng:

$$\bar{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4 L & F_5 & F_3 L \\ -F_4 L & F_2 L^2 & -F_3 L & F_1 L^2 \\ F_5 + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_1(L, \omega)}{\partial x} & -F_3 L + \frac{PL^2}{EI} \frac{\partial N_2(L, \omega)}{\partial x} & F_6 + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_3(L, \omega)}{\partial x} & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_4(L, \omega)}{\partial x} \\ F_3 L & F_1 L^2 & F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Trong bài toán này, lực P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không $\hat{F}^*(\omega) = 0$. Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực theo điều kiện biên tại $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$, ta có:

$$\hat{K}^*(\omega, P)\hat{U}^*(\omega) = 0 \quad (27)$$

trong đó $\hat{K}^*(\omega, P)$ là ma trận độ cứng động lực rút gọn:

$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_3(L, \omega)}{\partial x} & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \frac{\partial N_4(L, \omega)}{\partial x} \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix}$$

Trong biểu thức này, các hàm số F_2 , F_4 , F_6 được xác định theo (7), các hàm số $N_3(x, \omega)$; $N_4(x, \omega)$ được xác định theo (3), đồng thời:

$$N_3(L, \omega) = 1; N_4(L, \omega) = 0; \frac{\partial N_3(L, \omega)}{\partial x} = 0; \frac{\partial N_4(L, \omega)}{\partial x} = 1 \quad (28)$$

Do đó ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn:

$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi định thức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không:

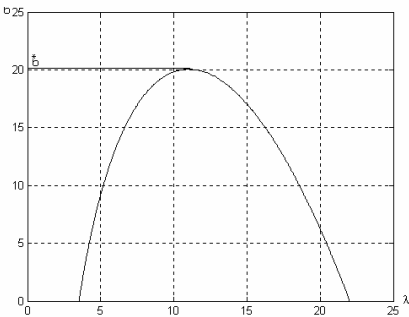
$$\det \bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \det \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

suy ra:

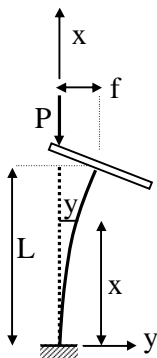
$$F_6 F_2 L^2 - F_4^2 L^2 - F_4 \frac{PL^4}{EI} = L^2 (F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4) = 0 \quad (31)$$

Sử dụng (20), ta biến đổi vế trái của (31):

$$F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4 = -\frac{\lambda}{\delta} (2\lambda^2 + \sigma^2 + \sigma \lambda \sin \alpha \sinh \beta + 2\lambda^2 \cos \alpha \cosh \beta) \quad (32)$$



Hình 5. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$



Hình 6.

Từ đó ta nhận lại được phương trình (23), tức là cách giải theo phương pháp ma trận độ cứng động lực và phương pháp giải tích cho ta cùng một kết quả.

4.3. Xác định lực tới hạn

Từ phương trình (23), ta nhận thấy:

- Khi không có lực đẩy thì $\sigma=0$, nghiệm λ của (23) là các số thực, nó tương ứng với hai tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén. Khi tăng giá trị tham số tải trọng σ , hai nghiệm bé nhất của phương trình tiến dần về nhau và khi $\sigma = \sigma^* = 20,05$ thì hai nghiệm này là trùng nhau (hình 5).

- Khi σ tiếp tục tăng, các nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Do đó, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, thanh công xôn chịu nén bởi lực đẩy sẽ bị mất ổn định khi $\sigma = \sigma^*$, tương ứng với tải trọng tới hạn:

$$P_{th} = 20,05 \frac{EI}{L^2} \quad (33)$$

Giá trị tải trọng tới hạn của lực đẩy tìm được gần với giá trị tải trọng tới hạn khi bỏ qua khối lượng phân bố của thanh và gấp 8,13 lần tải trọng tới hạn của thanh công xôn chịu nén bởi lực thẳng đứng (21).

5. Ổn định của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi

5.1. Phương pháp giải tích

Xét ổn định của thanh công xôn có khối lượng phân bố đều chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi P (hình 6). Ta cũng nhận được phương trình (9) với điều kiện biên tại đầu ngàm tương tự (10). Tại đầu tự do, thay cho điều kiện (11), điều kiện biên có dạng:

$$EI \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = -Py(L,t); EI \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = -P \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} \quad (34)$$

Bằng cách đặt tương tự (12), ta nhận phương trình đặc trưng:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ (\sigma - \alpha^2) \sin \alpha & (\sigma - \alpha^2) \cos \alpha & (\sigma + \beta^2) \sinh \beta & (\sigma + \beta^2) \cosh \beta \\ (\sigma - \alpha^2) \alpha \cos \alpha & -(\sigma - \alpha^2) \alpha \sin \alpha & (\sigma + \beta^2) \beta \cosh \beta & (\sigma + \beta^2) \beta \sinh \beta \end{pmatrix} = 0$$

dẫn đến cùng phương trình đặc trưng (23) và cùng một giá trị tải trọng tới hạn (33) như bài toán ổn định của thanh chịu nén bởi lực đuổi.

5.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Đối với bài toán lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 ($x=L$), mômen tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng:

$$\bar{Q}_3 e^{i\omega t} = Q_3 e^{i\omega t} \quad (35)$$

$$\bar{M}_3 e^{i\omega t} = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = M_3 e^{i\omega t} + P \cdot y(L,t) = M_3 e^{i\omega t} + P \cdot N(L,\omega) \{u\} e^{i\omega t}$$

Trong bài toán này, lực P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không $\hat{F}^*(\omega) = 0$. Khi dạng suy biến với điều kiện biên ngàm tại $x=0$: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$, ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn của thanh chịu lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 có dạng:

$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L + \frac{PL^3}{EI} N_3(L, \omega) & F_2 L^2 + \frac{PL^3}{EI} N_4(L, \omega) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Sử dụng (28), ta được :

$$\bar{K}^*(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L + \frac{PL^3}{EI} & F_2 L^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi định thức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không, từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng hoàn toàn trùng với phương trình (31), do đó lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 có giá trị bằng với lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực đuổi (33). Như vậy, cách giải theo phương pháp giải tích và phương pháp MTĐCĐL đều dẫn đến cùng một kết quả.

6. Kết luận

Từ các ví dụ đã được giải ở trên, ta thấy rằng việc xác định lực tới hạn theo phương pháp MTĐCĐL dựa theo tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học dẫn đến các kết quả là các phương trình đặc trưng và các giá trị lực tới hạn hoàn toàn trùng với kết quả đã biết theo các phương pháp giải tích. Trong các trường hợp phức tạp không có nghiệm giải tích, để xác định lực tới hạn thì phải dùng phương pháp MTĐCĐL. Đây chính là cơ sở để có thể áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực vào các bài toán ổn định hệ thanh phức tạp hơn được xử lý bằng các chương trình tính toán hiện đại, áp dụng các phương pháp tính toán bằng số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TRẦN VĂN LIÊN. Bài toán ngược của cơ học và một số ứng dụng, *Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội, 2002.*
2. LÊU THỌ TRÌNH, ĐỖ VĂN BÌNH. Ổn định công trình, *NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 2002.*
3. LEUNG A.Y.T. Dynamic Stiffness and Substructures. *Springer-Verlag, London, 1993.*
4. Rao S.S. Mechanical Vibrations. Second Edition, Addison-Wesley Pub Company, 1986.
5. БОЛОТИН В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. *Изд. Физмат, Москва, 1961.*
6. ПАНОВКО Я.Г.; ГУБАНОВА И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. *Наука, Москва, 1979.*