HẠ CHÌM KẾT CẤU DẠNG THANH LÀ VẬT RẮN ĐÀN HỒI, ĐỒNG CHẤT, CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI ĐỀU VÀO ĐẤT

ThS. **NGUYỄN ĐẮC HƯNG**
Ban Khoa giáo Trung ương

1. Đặt vấn đề

Trong thực tế, đôi khi chúng ta gặp trường hợp phải hạ kết cấu có tiết diện thay đổi vào đất, nhưng chưa được nghiên cứu kĩ cả về phương diện lý thuyết và thực nghiệm. Trong công trình này, tác giả giải bài toán hạ chìm kết cấu dạng thanh đàn hồi, đồng chất có tiết diện thay đổi đều vào đất, kết cấu chịu lực cản mặt đầu và lực cản ma sát giữa mặt bên, lực kích động gây ra do ghép hai máy rung.

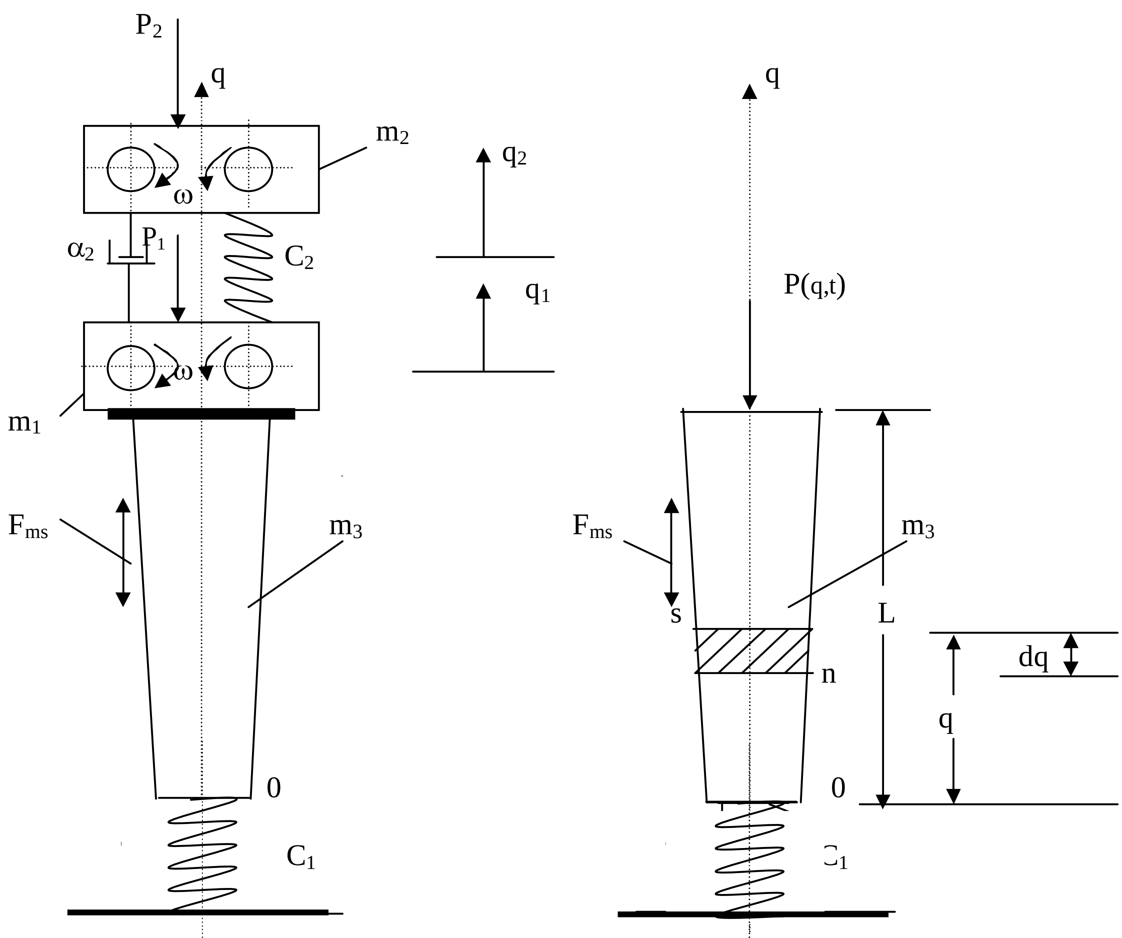
2. Thiết lập bài toán

2.1. Một số giả thiết

- Kết cấu ngàm hoàn toàn trong đất và dịch chuyển theo phương thẳng đứng.
- Đất được coi là môi trường đàn hồi. Mặt đất không dịch chuyển trong quá trình hạ chìm kết cấu.
- Lực ma sát phân bố đều trên bề mặt kết cấu và tỷ lệ bậc nhất với vận tốc dịch chuyển.

Chọn hệ trục oq hướng từ dưới lên trên, gốc toạ độ 0 đặt tại vị trí trùng với mặt mút dưới của kết cấu.

Mô hình bài toán như hình 1.



Hình 1. *Mô hình bài toán*

2.2. Một số ký hiệu

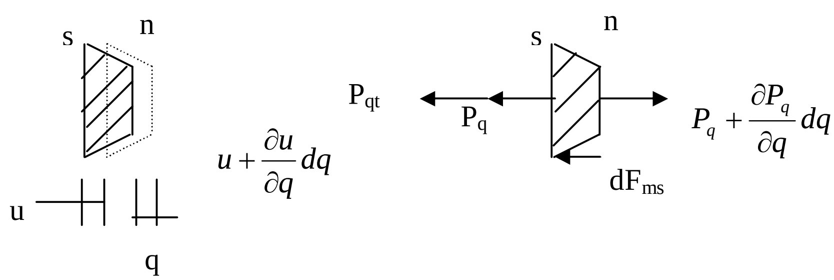
q_1, q_2 - toạ độ trọng tâm của máy rung 1 và máy rung 2.

q – toạ độ mặt cắt ngang của kết cấu khi khảo sát.
u= u(q,t) – hàm dịch chuyển tại mặt cắt của kết cấu.
E- mô đun đàn hồi của vật liệu (kN/m^2).
L- chiều dài của kết cấu (m).
A_0- diện tích mặt cắt ngang của kết cấu tại q = 0 (m^2).
A_L- diện tích mặt cắt ngang của kết cấu tại $q = L$ (m^2).
A_q- diện tích mặt cắt ngang tại mặt cắt có toạ độ q (m^2).
D_q - chu vi của mặt cắt ngang tại mặt cắt có toạ độ q (m).
ρ - khối lượng riêng của vật liệu làm kết cấu (kg/m^3).
h_1, h_2 – toạ độ trọng tâm của hai máy rung ở trạng thái cân bằng tĩnh (m).
m_1- khối lượng của máy rung thứ nhất (kg).
m_2 – khối lượng của máy rung thứ hai (kg).
m_3 – khối lượng của kết cấu (kg).
α_2 - hệ số giảm chấn của liên kết đàn hồi (kNs/m^2).
F_{ms} – lực ma sát giữa mặt bên của kết cấu với đất (kN).
k- hệ số cản mặt bên giữa đất với kết cấu (kNs/m^2).
C_1- hệ số đàn hồi của đất (kN/m).
C_2 - hệ số đàn hồi của lò xo liên kết hai máy rung (kN/m).
P_1, P_2 – biên độ lực kích động của hai máy rung (kN).
ω - tần số góc của bộ phận gây kích động rung (rad/s).

Các tham số: $m_1, m_2, \alpha_2, C_1, C_2, P_1, P_2, k, \omega, h_1, h_2$ là các hằng số dương.

2.3. Thiết lập PTVP dao động của kết cấu

Tưởng tượng cắt kết cấu bởi hai mặt phẳng [s] và [n] vuông góc với trục, tách phân tố đó ra và khảo sát sự dịch chuyển của nó, hình 2.



Hình 2. *Phân tố để khảo sát sự dịch chuyển*

Gọi *u = u(q,t)* là dịch chuyển tiết diện tại [s] của kết cấu.

Tại mặt cắt [*n*] dịch chuyển được biểu diễn dưới dạng: $u + \frac{\partial u}{\partial q} dq$ (1)

- Tại mặt cắt [*s*], lực $P_q(q,t)$ tác dụng vào kết cấu là:

$P_q = EA_q\varepsilon = EA_q \frac{\partial u}{\partial q}$ (2)

EA_q- độ cứng của kết cấu khi kéo nén.

- Tại mặt cắt [*n*], lực tác dụng vào kết cấu là: $P_q + \frac{\partial P_q}{\partial q} dq$ (3)

Khối lượng phân tố đang xét của kết cấu là: $\rho A_q dq$

$\Rightarrow$ lực quán tính của nó là: $p_{qt} = -\rho A_q dq.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (4)

Với hình dáng tiết diện của kết cấu cụ thể sẽ chứng minh được mối quan hệ giữa diện tích A_q và chu vi D_q của tiết diện tại toạ độ q. Ở đây chúng tôi chọn kết cấu có dạng hình chóp cụt, tiết diện là hình vuông để tính toán.

Gọi a_q là kích thước một cạnh của A_q.

Như vậy: $D_q = 4a_q$; $A_q = a_q^2$

Suy ra : $\dfrac{D_q}{A_q} = \dfrac{4}{a_q}$ (5)

$a_q = a_0 + \dfrac{a_L - a_0}{L} q$; Đặt $v = \dfrac{a_L - a_0}{L}$ (6)

Suy ra $a_q = a_0 + vq$; $A_0 = a_0^2$; $A_L = a_L^2 = (a_0 + vL)^2$ (7)

$D_q = 4a_q = 4(a_0 + vq)$ (8)

Lực ma sát giữa phân tố kết cấu đang xét và đất là:

$$dF_{ms} = kD_q dq \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9)$$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe, ta có :

$$-P_q + \left(P_q + \frac{\partial P_q}{\partial q} dq\right) - \rho A_q dq \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - kD_q dq \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial q}\left[EA_q \frac{\partial u}{\partial q}\right] = \rho A_q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kD_q \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

3. Giải bài toán

3.1. Giải phương trình vi phân (11)

Thay (7) và (8) vào (11) và biến đổi ta có:

$$E\left[2v.\frac{\partial u}{\partial q} + (a_0 + vq).\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right] = \rho(a_0 + vq).\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4K.\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow 2v.\frac{\partial u}{\partial q} + (a_0 + vq).\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\rho}{E}(a_0 + vq).\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4K}{E}.\frac{\partial u}{\partial t} \quad (12)$$

Đặt: $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$; $b = \dfrac{4k}{E}$; $x = a_q = a_0 + vq$ (13)

Suy ra: $\dfrac{\partial u}{\partial q} = v\dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (14)

Thay (13) và (14) vào (12) sau đó chia cả 2 vế của nó cho xv^2 ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2 v^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{x}.\frac{b}{v^2}.\frac{\partial u}{\partial t} \quad (15)$$

Giải phương trình vi phân (15) bằng phương pháp Furiê.

Đặt $u(x,t) = X(x).T(t)$ và thay vào từng số hạng của (15), ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x).T(t); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x).T(t); \frac{\partial u}{\partial t} = X(x).\dot{T}(t); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x).\ddot{T}(t). \quad (16)$$

Thay (16) vào (15) và chia cả hai vế cho $X.T$ ta có:

$$\frac{X''}{X} + \frac{2}{x}.\frac{X'}{X} = \frac{1}{a^2 v^2}.\frac{\ddot{T}}{T} + \frac{1}{x}.\frac{b}{v^2}.\frac{\dot{T}}{T} \quad (17)$$

Vì x là biến số nên (17) chưa phân ly biến số hoàn toàn, nếu ta thay x ở vế phải của (17) bằng $x_* = \dfrac{1}{2}(a_0 + a_L)$ là giá trị trung bình trong khoảng $[a_0, a_L]$ (a_0 là một cạnh của tiết diện tại $q = 0$; a_L là một cạnh của tiết diện tại $q = L$), thì x_* sẽ là hằng số. Thay x_* vào vị trí x ở vế phải phương trình (17) ta có:

$$\frac{X''}{X} + \frac{2}{x}.\frac{X'}{X} = \frac{1}{a^2 v^2}.\frac{\ddot{T}}{T} + \frac{1}{x_*}.\frac{b}{v^2}.\frac{\dot{T}}{T} \quad (17')$$

Vì x_* là 1 hằng số nên PTVP (17') đã phân ly biến số hoàn toàn.

Để (17') luôn đúng với mọi x và t thì:

$$\frac{X''}{X}+\frac{2}{x}.\frac{X'}{X}=\frac{1}{a^2v^2}.\frac{\ddot{T}}{T}+\frac{1}{x_*}.\frac{b}{v^2}.\frac{\dot{T}}{T}=const=-\lambda^2 \qquad (18)$$

Từ phương trình (18), có thể tách ra được hai phương trình vi phân tuyến tính cấp hai như sau:

$$\begin{cases} X''+\frac{2}{x}X'+\lambda^2X=0 & (19)\\ \ddot{T}+\frac{ba^2}{x_*}.\dot{T}+a^2v^2\lambda^2T=0 & (20)\end{cases}$$

Giải phương trình vi phân (19)

Việc giải (19) giống như mục 1.2, trang 86, ở [5].

Và nghiệm của (19) là:

$$X(x)=\xi_1\frac{\cos\lambda x}{x}+\xi_2\frac{\sin\lambda x}{x} \qquad (21)$$

Giải phương trình vi phân (20)

Phương trình đặc trưng của (20) là: $r^2+\frac{a^2b}{x_*}r+a^2v^2\lambda^2=0$ (22)

$$\Delta=\left(\frac{a^2b}{x_*}\right)^2-4a^2v^2\lambda^2=a^2\left(\frac{a^2b^2}{x_*^2}-4v^2\lambda^2\right) \qquad (23)$$

- Nếu $\frac{a^2b^2}{x_*^2}>4v^2\lambda^2$ (Δ>0) thì phương trình (22) có hai nghiệm thực phân biệt:

$$r_{1,2}=-\frac{a^2b}{2x_*}\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{x_*^2}-4v^2\lambda^2} \quad (r_1, r_2<0)$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (20) là: $T_1=\gamma_1e^{r_1t}+\gamma_2e^{r_2t}$

- Nếu $\frac{a^2b^2}{x_*^2}=4v^2\lambda^2$ (Δ=0), thì (22) có 1 nghiệm kép : $r_0=-\frac{a^2b}{2x_0}$<0

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (20) là: $T_2=(\gamma_1+\gamma_2t)e^{r_0t}$

- Nếu $\frac{a^2b^2}{x_*^2}<4v^2\lambda^2$ (Δ<0), thì (22) có 2 nghiệm phức liên hợp: $r=\alpha\pm i\beta$;

$$\alpha=-\frac{a^2b}{2x_*}, \beta=\frac{a}{2}\sqrt{4v^2\lambda^2-\frac{a^2b^2}{x_*^2}}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (20) là: $T_3=e^{\alpha t}(\gamma_1\cos\beta t+\gamma_2\sin\beta t)$

3.2. Xác định điều kiện đầu và ĐK biên của bài toán

Các điều kiện của bài toán được xác định ở trang 84 của [5], cụ thể như sau: $0\le q\le L$ và $0\le t\le\tau$ (τ là thời gian hạ cọc).

Điều kiện đầu: khi t = 0

$$u(L,0)=-\frac{(\alpha_2H_2\omega+C_2G_2)}{2m_1\omega^2}=D_1 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial u(L,0)}{\partial t}=\frac{\alpha_2G_2\omega-C_2H_2}{2m_1\omega}=D_2 \qquad (25)$$

Với $G_2=\frac{p_2(C_2-m_2\omega^2)}{(C_2-m_2\omega^2)^2+\alpha_2^2\omega^2}$;

$$H_2 = \frac{p_2\alpha_2\omega}{(C_2 - m_2\omega^2)^2 + \alpha_2^2\omega^2}$$

Điều kiện biên:

Tại q = 0, $P_q(0,t) = C_1 u(0,t) \Rightarrow \quad EA_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial q} = C_1 u(0,t)$ (26)

Tại $q = L$:

$$\left(p_1 + p_2 - \frac{C_2 G_2}{2} - m_2\omega^2 G_2 - \frac{\alpha_2 H_2 \omega}{2}\right)\cos\omega t + \\ + \left(\frac{\alpha_2 G_2 \omega}{2} - \frac{C_2 H_2}{2} - m_2\omega^2 H_2\right)\sin\omega t = EA_L \frac{\partial u(L,t)}{\partial q} \quad (27)$$

Đặt $\varepsilon_1 = \left(p_1 + p_2 - \frac{C_2 G_2}{2} - m_2\omega^2 G_2 - \frac{\alpha_2 H_2 \omega}{2}\right)$ (28)

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\alpha_2 G_2 \omega}{2} - \frac{C_2 H_2}{2} - m_2\omega^2 H_2\right) \quad (29)$$

Thay (28) và (29) vào (27) ta có:

$$\varepsilon_1 \cos\omega t + \varepsilon_2 \sin\omega t = EA_L \frac{\partial u(L,t)}{\partial q} \quad (30)$$

4. Tìm hàm *u(x,t)* thoả mãn các điều kiện cho trước

4.1. Lựa chọn nghiệm T(t).

Trong các nghiệm T_1, T_2, T_3, chỉ có T_3 là thoả mãn các điều kiện biên của bài toán, do đó thay $T_3 = T(t)$ vào công thức $u(x,t) = X(x).T(t)$, ta có:

$$u(x,t) = \xi_1 \frac{\cos\lambda x}{x} + \xi_2 \frac{\sin\lambda x}{x}.(\gamma_1\cos\beta t + \gamma_2 \sin\beta t)e^{\alpha t} \quad (31)$$

Từ (31), cho thấy thừa số $e^{\alpha t}$ biến thiên trong khoảng [1, $e^{\alpha t}$] tương ứng với t nằm trong khoảng $[0, \tau]$.

Thay $\bar{I}$ và $u(x,t) = \varepsilon_1\cos\omega t + \varepsilon_2\sin\omega t$ vào (31), ta có:

$$\xi_1 \frac{\cos\lambda x}{x} + \xi_2 \frac{\sin\lambda x}{x}.(\gamma_1\cos\beta t + \gamma_2\sin\beta t)\bar{I} = \varepsilon_1\cos\omega t + \varepsilon_2 \sin\omega t \quad (32)$$

Để có thể giải phương trình (32) bằng cách cân bằng hệ số, ta thay $e^{\alpha t}$ bằng một giá trị trung bình trong khoảng [1, $e^{\alpha t}$], gọi giá trị đó là $\bar{I} = \frac{1}{2}(1 + e^{\alpha\tau})$.

4.2. Xác định các hệ số bằng phương pháp cân bằng hệ số bất định

Xác định đạo hàm của X theo biến q kí hiệu là X'(q) và T theo biến t kí hiệu là $\dot{T}$ (t)

Đưa biến x trở lại biến q bằng cách thay $x = a_0 + vq$, ta có:

$$X(q) = \xi_1 \frac{\cos\lambda(a_0 + vq)}{(a_0 + vq)} + \xi_2 \frac{\sin\lambda(a_0+vq)}{(a_0+vq)} \quad (33)$$

$$T(t) = e^{\alpha t}(\gamma_1\cos\beta t + \gamma_2 \sin\beta t)$$

Đạo hàm $X(q)$ theo q và $T(t)$ theo t, ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} X'(q) = \dfrac{\left[\xi_2\lambda v(a_0+vq) - \xi_1 v\right]\cos\lambda(a_0+vq) - \left[\xi_1\lambda v(a_0+vq) + \xi_2 v\right]\sin\lambda(a_0+vq)}{(a_0+vq)^2} \\ \dot{T}(t) = e^{\alpha t}\left[(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)\cos\beta t + (\alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1)\sin\beta t\right] \end{cases} \quad (34)$$

Khai thác các điều kiện của bài toán để xác định các hệ số

- Từ điều kiện đầu (24) và (25) ta có:

$$T(t)=\gamma_2\left(\frac{\beta D_1}{D_2-\alpha D_1}\cos\beta t+\sin\beta t\right)e^{\alpha t} \qquad (35)$$

- Từ điều kiện biên (26) ta có: *$EA_0.X'(0).T(t)= C_1X(0).T(t)$* $\leftrightarrow$ *$EA_0X'(0) = C_1.X(0)$.* Thay các giá trị cụ thể của *X(0)* và *X'(0)* vào biểu thức và biến đổi ta có:

$$\xi_1=\mu\xi_2 \qquad (36)$$

Với $\mu=\dfrac{Ea_0^2\lambda v\cos\lambda a_0-(Ea_0v+C_1)\sin\lambda a_0}{(Ea_0v+C_1)\cos\lambda a_0+Ea_0^2\lambda v\sin\lambda a_0}$

$$\Rightarrow X(q)=\xi_2.\frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq)+\sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq} \qquad (37)$$

- Từ điều kiện biên (27), ta có:

$$\Rightarrow EA_LX'(L)\gamma_2\left[\frac{\beta D_1}{D_2-\alpha D_1}\cos\beta t+\sin\beta t\right]e^{\alpha t}=\varepsilon_1\cos\omega t+\varepsilon_2\sin\omega t \qquad (38)$$

Điều kiện để (38) luôn xảy ra là: $\beta=\omega\rightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{\dfrac{a^4b^2}{x_*^2}+4\omega^2}}{2av}$. (39)

λ là tần số dao động riêng của kết cấu.

Thay $\overline{I}$ vào vị trí của $e^{\alpha t}$ trong biểu thức (32); thay *q = L* vào (37) để xác định *X'(L)*, sau đó thay *X'(L)* vào (38) với $\beta=\omega$.

Cân bằng hệ số hai vế (38) theo cos và sin, ta được:

$$\begin{array}{ll}\text{Cos} & \\ \text{Sin} & \end{array}\left\{\begin{array}{l}EA_LX'(L)\gamma_2\overline{I}.\dfrac{\beta D_1}{D_2-\alpha D_1}=\varepsilon_1\\ EA_LX'(L)\gamma_2\overline{I}=\varepsilon_2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad (40)$$

Thay (37) và (35) vào công thức u(q,t) = X(q).T(t), ta có:

$$u(q,t)=\xi_2\frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq)+\sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq}.\gamma_2\left(\frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}.\cos\omega t+\sin\omega t\right)e^{\alpha t}$$

Vì ξ_2, γ_2 là những hằng số tuỳ ý nên có thể lấy $\gamma_2=1$.

Từ đẳng thức $EA_LX'(L)\gamma_2\overline{I}=\varepsilon_2$ suy ra: $X'(L)=\dfrac{\varepsilon_2}{E\overline{I}A_L}$ (41)

Thay giá trị X'(L) từ đạo hàm (37) và $A_L=a_L^2=(a_0+vL)^2$ vào (41) ta được:

$$\xi_2v.\left[(a_0+vL)\lambda-\mu\right]\cos\lambda(a_0+vL)-\left[(a_0+vL)\mu\lambda+1\right]\sin\lambda(a_0+vL)=\frac{\varepsilon_2}{E\overline{I}}$$

$$\Rightarrow\quad\xi_2=\frac{\varepsilon_2}{E\overline{I}v\left[\lambda a_L-\mu\right]\cos\lambda a_L-\left[\mu\lambda a_L+1\right]\sin\lambda a_L} \qquad (42)$$

Cuối cùng nghiệm của bài toán là:

$$u(q,t)=\xi_2\frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq)+\sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq}\left(\frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}.\cos\omega t+\sin\omega t\right)e^{\alpha t}$$

$$\dot{u}(q,t)=\xi_2\frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq)+\sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq}\left[\left(\omega+\frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}\right).\cos\omega t+\left(\alpha-\frac{\omega^2D_1}{D_2-\alpha D_1}\right)\sin\omega t\right]e^{\alpha t}$$

Nhận xét:

- Để xác định nghiệm trong khoảng [q_i, q_{i+1}], ta thay giá trị trung bình x_* bằng giá trị trung bình $x_i = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ là cạnh tiết diện nằm giữa khoảng [q_i, q_{i+1}] (a_i là cạnh của tiết diện tại toạ độ q_i và a_{i+1} là cạnh của tiết diện tại toạ độ q_{i+1}). Muốn vậy, ta chia chiều dài L của kết cấu thành m đoạn bằng nhau [q_i, q_{i+1}] = L/m (m = 1,2…).

Thay x_i vào vị trí x ở vế phải (18) và vào vị trí x_* ở các biểu thức, các bước xác định *T(t)* tương ứng với x_i vẫn giống như xác đinh *T(t)* đối với x_*.

- Để xác định nghiệm trong khoảng [t_j, t_{j+1}], ta thay I_j vào vị trí của $\overline{I}$, với $I_j = \frac{1}{2}(e^{\alpha t_{j+1}} + e^{\alpha t_j})$ ([t_j, t_{j+1}] = τ/n), việc tính toán tương tự như đối với $\overline{I}$.

Tổng kết lại, nghiệm của bài toán là:

$$u(q,t) = \xi_2 \frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq) + \sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq}\left(\frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}.\cos\omega t + \sin\omega t\right)e^{\alpha t}$$

$$\dot{u}(q,t) = \xi_2 \frac{\mu\cos\lambda(a_0+vq) + \sin\lambda(a_0+vq)}{a_0+vq}\left[\left(\omega + \frac{\omega D_1}{D_2-\alpha D_1}\right).\cos\omega t + \left(\alpha - \frac{\omega^2 D_1}{D_2-\alpha D_1}\right)\sin\omega t\right]e^{\alpha t}$$

Trong các công thức đã được dẫn ra các ký hiệu:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}};\ b = \frac{4k}{E};\quad v = \frac{a_L - a_0}{L}q;\quad A_0 = a_0^2;\ A_L = a_L^2 = (a_0 + vL)^2.$$

$$-\frac{(\alpha_2 H_2\omega + C_2 G_2)}{2m_1\omega^2} = D_1;\quad \frac{\alpha_2 G_2\omega - C_2 H_2}{2m_1\omega} = D_2;\ G_2 = \frac{p_2(C_2 - m_2\omega^2)}{(C_2-m_2\omega^2)^2 + \alpha_2^2\omega^2};$$

$$H_2 = \frac{p_2\alpha_2\omega}{(C_2-m_2\omega^2)^2 + \alpha_2^2\omega^2};\ \varepsilon_1 = \left(p_1 + p_2 - \frac{C_2G_2}{2} - m_2\omega^2 G_2 - \frac{\alpha_2 H_2\omega}{2}\right);$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\alpha_2 G_2\omega}{2} - \frac{C_2 H_2}{2} - m_2\omega^2 H_2\right)$$

- Nếu xét trong khoảng [$0,\ \tau$] : $\xi_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{E\overline{I}v[\lambda a_L - \mu]\cos\lambda a_L - [\mu\lambda a_L + 1]\sin\lambda a_L}$; $\overline{I} = \frac{1}{2}(1 + e^{\alpha\tau})$

- Nếu xét trong khoảng [t_j, t_{j+1}] : $\xi_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{EI_j v[\lambda a_L - \mu]\cos\lambda a_L - [\mu\lambda a_L + 1]\sin\lambda a_L}$;

$$I_j = \frac{1}{2}(e^{\alpha t_{j+1}} + e^{\alpha t_j})$$

$$\mu = \frac{Ea_0^2\lambda v\cos\lambda a_0 - (Ea_0 v + C_1)\sin\lambda a_0}{(Ea_0 v + C_1)\cos\lambda a_0 + Ea_0^2\lambda v\sin\lambda a_0}$$

- Nếu xét trên khoảng [0, L]:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{a^4b^2}{x_*^2} + 4\omega^2}}{2av} = \frac{\sqrt{a^4b^2 + 4\omega^2 x_*^2}}{2avx_*} = \frac{L\sqrt{16K^2 + \omega^2\rho^2(a_0+a_L)^2}}{\sqrt{E}(a_L^2 - a_0^2)};\qquad x_* = \frac{1}{2}(a_0 + a_L);$$

$$\alpha = -\frac{a^2b}{2x_*}, \beta = \frac{a}{2}\sqrt{4v^2\lambda^2 - \frac{a^2b^2}{x_*^2}}$$

- Nếu xét trên khoảng [q_i, q_{i+1}]:

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\frac{a^4b^2}{x_i^2}+4\omega^2}}{2av} = \frac{\sqrt{a^4b^2+4\omega^2x_i^2}}{2avx_i} = \frac{L\sqrt{16K^2+\omega^2\rho^2(a_i+a_{i+1})^2}}{\sqrt{E}(a_{i+1}^2-a_i^2)}; \qquad x_i = \frac{1}{2}(a_i+a_{i+1});$$

$$\alpha_i = -\frac{a^2b}{2x_i}, \beta = \frac{a}{2}\sqrt{4v^2\lambda^2-\frac{a^2b^2}{x_i^2}}$$

5. Kết luận

Tác giả đã xác định được $u(q,t)$ và $\dot{u}(q,t)$ dưới dạng nghiệm giải tích. Dựa vào kết quả của bài toán có thể lập chương trình máy tính xác định hàm dịch chuyển tại mặt cắt trung bình của kết cấu, trong khoảng thời gian hạ chìm kết cấu [$0,\tau$]; hoặc mặt cắt trung bình trong mỗi đoạn của kết cấu [q_i, q_{i+1}], trong khoảng thời gian [t_j, t_{j+1}]. Dựa vào chiều vận tốc của $\dot{u}$, có thể xác định được điều kiện để kết cấu dịch chuyển vào đất, đứng yên hay bị nhổ lên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN THÚC AN và các CTV.Lý thuyết dao động.*NXB Nông Nghiệp, Hà Nội, 2004.*
2. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ, NGUYỄN TRỌNG THÁI. Phương trình Vật lý toán. *NXB Đại học và THCN, Hà Nội, 1971*.
3. NGUYỄN ĐÌNH CHIỀU và các CTV. Cơ sở lý thuyết kỹ thuật rung trong xây dựng. *NXB khoa học và kỹ thuật, Hà Nội, 2004.*
4. NGUYỄN ĐÌNH CHIỀU, NGUYỄN ĐẮC HƯNG.Dao động của kết cấu được hạ chìm vào đất bằng hai máy rung. *Tạp chí khoa học và kỹ thuật Thuỷ lợi & môi trường, số 9, tháng 6-2005.*
5. NGUYỄN ĐÌNH CHIỀU, NGUYỄN ĐẮC HƯNG.Nghiên cứu dao động dọc của kết cấu (dạng thanh) đàn hồi, đồng chất có tiết diện thay đổi đều gây ra do hai máy rung. *Tạp chí khoa học và kỹ thuật Thuỷ lợi & môi trường, số 10, tháng 9-2005.*
6. NGUYỄN ĐẮC HƯNG.Hạ chìm kết cấu dạng thanh đàn hồi, đồng chất có tiết diện không đổi vào đất được gây ra do hai máy rung. *Tạp chí khoa học và kỹ thuật Thuỷ lợi & môi trường, số 11, tháng 12-2005.*