

TÍNH TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC KHUNG PHẪNG ĐÀN - DẪO CÓ KỂ ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC DỌC ĐẾN TRẠNG THÁI GIỚI HẠN DẪO CỦA TIẾT DIỆN

ThS. NGUYỄN VĂN TÚ, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN HỘI
 Học viện Kỹ thuật Quân sự

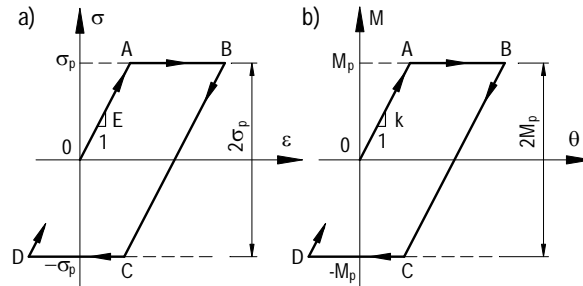
Tóm tắt: Trong bài báo trình bày phương pháp và các kết quả tính toán khung phẳng đàn – dẻo song tuyến tính chịu tác dụng của tải trọng động có kể đến ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện. Kết cấu được tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Phương trình chuyển động phi tuyến của kết cấu được giải bằng phương pháp Newmark kết hợp với phương pháp lặp Newton – Raphson biến điệu. Từ các kết quả tính toán bằng số với kết cấu khung đã đưa ra các nhận xét về giá trị chuyển vị và nội lực động của kết cấu khi kể đến ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện.

1. Mở đầu

Như đã biết, đối với kết cấu khung chịu uốn thuần túy khi vật liệu biến dạng theo mô hình đàn – dẻo lý tưởng (ĐDLT) (hình 1), mômen dẻo giới hạn của tiết diện M_p được xác định theo công thức:

$$M_p = \sigma_p W_p, \quad (1)$$

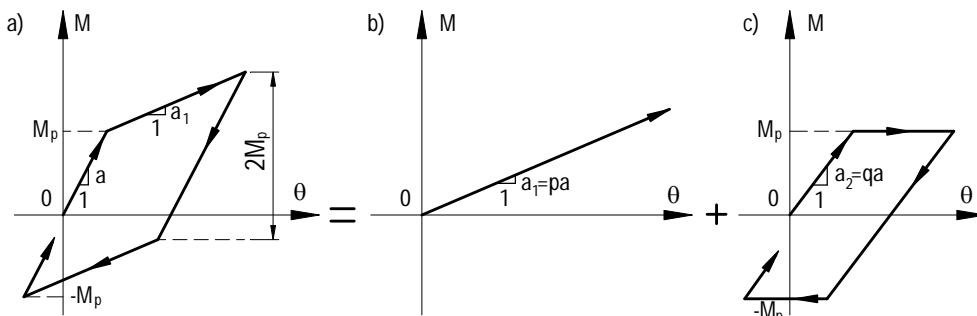
Trong đó: σ_p - ứng suất chảy dẻo của vật liệu, W_p - mô đun dẻo của tiết diện.



Hình 1. Mô hình đàn – dẻo lý tưởng: a) Quan hệ ứng suất – biến dạng, b) Quan hệ mômen uốn – góc xoay của tiết diện

Còn đối với kết cấu khung chịu uốn thuần túy nhưng làm bằng vật liệu biến dạng theo mô hình đàn – dẻo song tuyến tính (ĐDSTT) thì khi tính toán các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng của các phần tử thường sử dụng mô hình Clough [6,8], theo đó phần tử ĐDSTT được thay thế bằng 2 phần tử ảo: đàn hồi tuyến tính (ĐHTT) và ĐDLT như trên hình 2 [1,2,6,8].

Trong đó: E - mô đun đàn hồi của vật liệu, k , a - độ cứng chống uốn của phần tử, $a = a_1 + a_2$, $a_1 = pa$, $a_2 = qa$ và $p + q = 1$, p là tham số tương ứng với mô hình ĐHTT và q tương ứng với mô hình ĐDLT. Khi $p = 0 \Rightarrow q = 1$ thì mô hình ĐDSTT trở thành mô hình ĐDLT và khi $p = 1 \Rightarrow q = 0$ thì mô hình ĐDSTT trở thành mô hình ĐHTT.



Hình 2. Mô hình Clough: a) Phần tử ĐDSTT, b) Phần tử ĐHTT, c) Phần tử ĐDLT

Sự thừa nhận kết cấu khung làm việc theo trạng thái uốn thuần túy đồng nghĩa với việc coi ảnh hưởng của lực dọc N và lực cắt Q là bé nên có thể bỏ qua. Trong thực tế thường gặp nhiều dạng khung và tải trọng mà với

chúng ảnh hưởng của lực dọc là lớn, không thể bỏ qua, dẫn đến mômen dẻo giới hạn của tiết diện xác định theo công thức (1) không còn đúng nữa.

Trong bài báo này nghiên cứu phương pháp và thuật toán tính khung phẳng đàn – dẻo chịu tác dụng của tải trọng động có kể đến ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện.

2. Trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện thanh chịu uốn khi kể đến ảnh hưởng của lực dọc

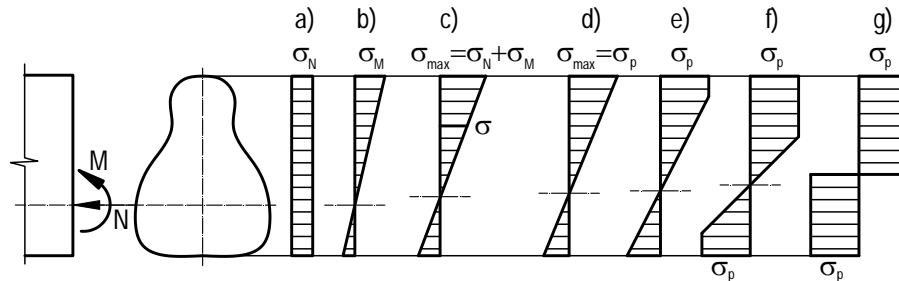
Khảo sát tiết diện của phần tử thanh thuộc kết cấu khung với vật liệu biến dạng theo mô hình ĐDLT chịu tác dụng đồng thời của mômen uốn M và lực dọc N (hình 3). Trên hình 3a, 3g thể hiện biểu đồ ứng suất pháp σ trên tiết diện trong các giai đoạn phát triển biến dạng khác nhau: hình 3a – do riêng lực dọc N gây ra (kéo nén đúng tâm); hình 3b – do riêng mômen uốn M gây ra (uốn thuần túy); hình 3c – do tác dụng đồng thời của mômen uốn M và lực dọc N khi $\sigma = \sigma_N + \sigma_M < \sigma_p$; hình 3d – khi ứng suất thứ biên ngoài cùng đạt trạng thái chảy dẻo $\sigma_{\max} = \sigma_p$; hình 3e – chảy dẻo trong vùng nén; hình 3f – chảy dẻo trong vùng nén và kéo; hình 3g – chảy dẻo hoàn toàn (trạng thái giới hạn).

Lực dọc và mômen uốn trên tiết diện do ứng suất pháp gây ra được tính theo công thức:

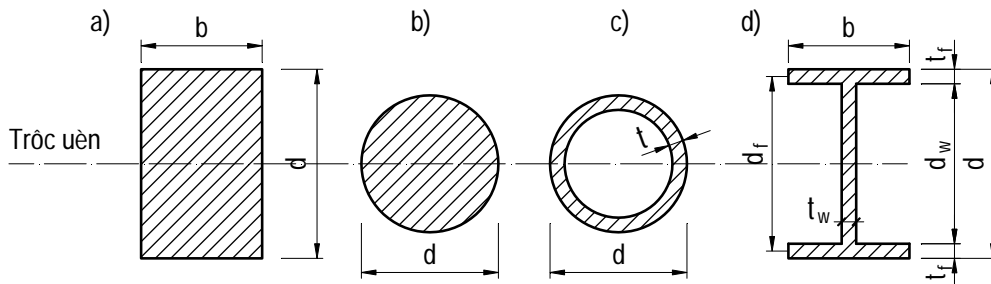
$$M = \int_A \sigma y dA, N = \int_A \sigma dA, \quad (2)$$

Trong đó: σ – ứng suất pháp tại điểm bất kỳ trên chiều cao tiết diện, A – diện tích tiết diện, y – khoảng cách từ trục trung hòa dẻo đến điểm khảo sát.

Từ điều kiện cân bằng nội lực M và N trên tiết diện tương ứng với trạng thái giới hạn (hình 3g) ta có thể xác định được giá trị mômen dẻo của tiết diện khi kể đến ảnh hưởng của lực dọc (ký hiệu là M_{pN}). Dưới đây dẫn ra các công thức tính toán M_{pN} đối với một số hình dạng phổ biến của tiết diện thanh [5,8].



Hình 3. Biểu đồ ứng suất pháp trên tiết diện thanh trong các giai đoạn phát triển biến dạng khác nhau khi chịu tác dụng đồng thời của mômen uốn và lực dọc (đối với trường hợp ĐDLT)



Hình 4. Các dạng tiết diện thanh phổ biến

a. Tiết diện chữ nhật (hình 4a)

$$\frac{M_{pN}}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2, \quad (3)$$

Trong đó: M_p – mômen uốn dẻo giới hạn của tiết diện chịu uốn thuần túy, $M_p = \sigma_p b d^2 / 4$, N_p – lực dọc giới hạn của tiết diện chịu kéo nén đúng tâm, $N_p = \sigma_p b d$.

b. Tiết diện hình tròn và tiết diện vành khăn (hình 4b, 4c)

$$\frac{M_{pN}}{M_p} = \frac{3}{4} \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin 3\varphi \right), \quad (4)$$

Trong đó φ được xác định từ phương trình sau:

$$1 - \frac{2}{\pi} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) = \frac{N}{N_p}, \quad (5)$$

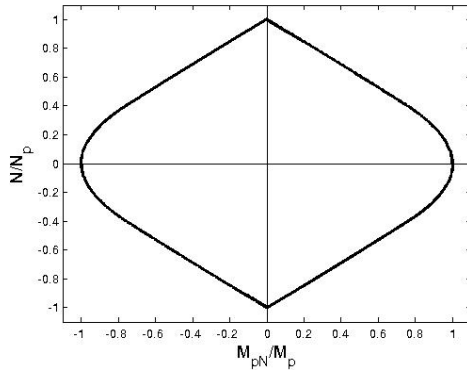
Trong đó: $M_p = \sigma_p d^3 / 6$, $N_p = \sigma_p \pi d^2 / 4$ (đối với tiết diện hình tròn – hình 4b); $M_p = \sigma_p t (d-t)^2$, $N_p = \sigma_p \pi t (d-t)$ (đối với tiết diện hình vành khăn – hình 4c).

c. Tiết diện chữ I ($d \times b \times t_w \times t_f$) chịu uốn quanh trục chính (hình 4d)

$$\text{- Khi } 0 \leq N/N_p \leq 1/(1+2bt_f/t_w d_w), \text{ ta có: } \frac{M_{pN}}{M_p} = 1 - \frac{\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \left(1 + \frac{2bt_f}{t_w d_w}\right)^2}{1 + \frac{4bt_f d_f}{t_w d_w^2}}. \quad (6)$$

$$\text{- Khi } 1/(1+2bt_f/t_w d_w) \leq N/N_p \leq 1, \text{ ta có: } \frac{M_{pN}}{M_p} = \frac{2 \left(\frac{l}{d_w}\right) \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \left(1 + \frac{2bt_f}{t_w d_w}\right)}{1 + \left(1 + \frac{d}{d_w}\right) \frac{2bt_f}{t_w d_w}}, \quad (7)$$

Trong đó: $l = d - t_f \left(1 + \frac{t_w d_w}{2bt_f}\right) \left(1 - \frac{N}{N_p}\right)$, $M_p = \sigma_p [bt_f (d-t_f) + (d/2-t_f)^2 t_w]$, $N_p = \sigma_p (2t_f b + t_w d_w)$.



Hình 5. Mặt dẻo đối với tiết diện chữ I(300x150x6.5x9)

Đồ thị biểu diễn quan hệ $M - N$ của tiết diện trong trạng thái giới hạn dẻo được gọi là mặt dẻo. Trên hình 5 thể hiện mặt dẻo đối với tiết diện chữ I(300x150x6.5x9) theo phương trình 6,7.

3. Phương trình chuyển động của kết cấu và phương pháp giải

Khảo sát hệ khung phẳng đàn – dẻo chịu tác dụng của tải trọng động. Để tổng quát, mô hình đàn – dẻo được sử dụng là mô hình ĐDSTT.

Để tính toán kết cấu khung sẽ sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, theo đó phương trình chuyển động của toàn bộ kết cấu được hình thành từ các phương trình chuyển động của các phần tử. Phương trình chuyển động tổng quát của kết cấu đàn – dẻo có dạng sau [7,8]:

$$[M(\{U\})]\{\ddot{U}\} + [C(\{U\})]\{\dot{U}\} + \{f_s(\{U\})\} = \{R\}, \quad (8)$$

Trong đó, $\{U\}, \{\dot{U}\}, \{\ddot{U}\}$ tương ứng là vectơ chuyển vị, vận tốc và gia tốc của các nút trong hệ; $[M(\{U\})], [C(\{U\})]$ tương ứng là ma trận khối lượng và ma trận cản của hệ; $\{f_s(\{U\})\}$ - vectơ lực phục hồi (nội lực nút) của hệ; $\{R\}$ - vectơ tải trọng quy nút.

Để giải phương trình chuyển động của hệ (8), sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark kết hợp với phương pháp lặp Newton - Raphson biến điệu [1,2,4,6,7,8].

Theo phương pháp Newmark [1,3,4,6,7,8], thời gian khảo sát được chia thành “ n ” khoảng bằng nhau Δt . Giả thiết đã biết các tham số chuyển động của kết cấu tại thời điểm t là $\{U_t\}, \{\dot{U}_t\}, \{\ddot{U}_t\}$. Cần

xác định các tham số chuyển động của kết cấu tại thời điểm $t+\Delta t$ là $\{U_{t+\Delta t}\}, \{\dot{U}_{t+\Delta t}\}, \{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}$. Phương trình chuyển động của hệ từ $t \rightarrow t+\Delta t$ dưới dạng số gia [7,8]:

$$[M_t]\{\Delta\ddot{U}\}_t + [C_t]\{\Delta\dot{U}\}_t + \{\Delta f_s\}_t = \{\Delta R\}_t, \quad (9)$$

Trong đó: $[M_t], [C_t]$ tương ứng là ma trận khối lượng và ma trận cản của hệ tại thời điểm t .

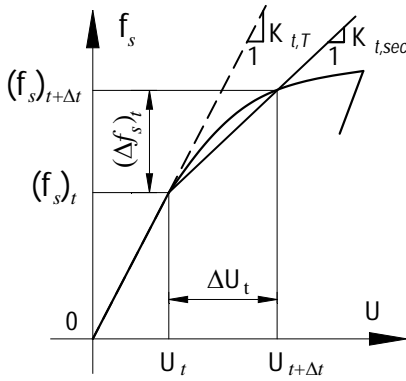
$$\{\Delta U\}_t = \{U\}_{t+\Delta t} - \{U\}_t; \{\Delta\dot{U}\}_t = \{\dot{U}\}_{t+\Delta t} - \{\dot{U}\}_t; \{\Delta\ddot{U}\}_t = \{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{U}\}_t; \quad (10)$$

$$\{\Delta f_s\}_t = \{f_s\}_{t+\Delta t} - \{f_s\}_t; \{\Delta R\}_t = \{R\}_{t+\Delta t} - \{R\}_t, \quad (11)$$

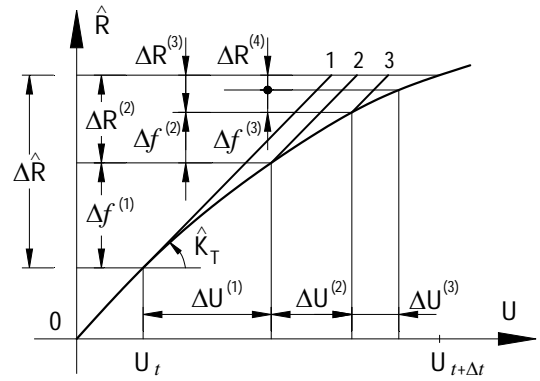
$$\{\Delta f_s\}_t = [K_t]_{\text{sec}} \{\Delta U\}_t, \quad (12)$$

$[K_t]_{\text{sec}}$ - ma trận độ cứng cát tuyến của hệ tại thời điểm t (hình 6). Nếu bước thời gian Δt đủ nhỏ thì ma trận độ cứng cát tuyến có thể thay thế bằng ma trận độ cứng tiếp tuyến $[K_t]_T$, theo đó phương trình (12) được xấp xỉ dưới dạng:

$$\{\Delta f_s\}_t \cong [K_t]_T \{\Delta U\}_t, \quad (13)$$



Hình 6. Quan hệ nội lực – chuyển vị của hệ phi tuyến



Hình 7. Sơ đồ lặp biến đổi Newton – Raphson trong mỗi bước bước thời gian

Tính đến (13) và bỏ qua chỉ số T từ $[K_t]_T$, phương trình (9) có dạng:

$$[M_t]\{\Delta\ddot{U}\}_t + [C_t]\{\Delta\dot{U}\}_t + [K_t]\{\Delta U\}_t = \{\Delta R\}_t, \quad (14)$$

Trong thực hành tính toán, ma trận cản $[C_t]$ được thừa nhận dưới dạng tổ hợp tuyến tính của ma trận khối lượng và ma trận độ cứng: $[C_t] = \gamma[M_t] + \beta[K_t]$, với γ và β là các hệ số cản Rayleigh, được xác định theo các tần số dao động riêng thấp nhất của kết cấu ω_1, ω_2 và các tỷ số cản tương ứng ζ_1, ζ_2 [1,3,4,6,7,8]. Các ma trận của hệ tại thời điểm t : $[M_t], [K_t], [C_t]$, phụ thuộc vào trạng thái biến dạng đàn – dẻo ở hai đầu thanh và đã được thiết lập trong các bài báo [1,2]. Sử dụng các quan hệ của phương pháp tích phân Newmark [1,7,8], phương trình cân bằng (14) dẫn tới dạng:

$$[\hat{K}_t]\{\Delta U\}_t = \{\Delta \hat{R}\}_t, \quad (15)$$

Trong đó: $[\hat{K}_t] = [K_t] + a_0[M_t] + a_1[C_t]$ - ma trận độ cứng hiệu quả;

$$\{\Delta \hat{R}\}_t = \{\Delta R\}_t + (a_2[M_t] + a_4[C_t])\{\dot{U}\}_t + (a_3[M_t] + a_5[C_t])\{\ddot{U}\}_t - \text{véc tơ tải trọng hiệu quả};$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha}, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} \quad \text{và} \quad a_5 = \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right).$$

Các tham số α và δ là các hằng số được chọn như sau [3,4,6,7]: với phương pháp gia tốc trung bình $\delta=1/2, \alpha=1/4$; với phương pháp gia tốc tuyến tính $\delta=1/2, \alpha=1/6$.

Phương trình (15) là phương trình tựa tĩnh, có $[\hat{K}_t]$ phụ thuộc vào véc tơ chuyển vị $\{U\}$ nên là phương trình phi tuyến. Để giải nó sẽ sử dụng phương pháp lặp Newton - Raphson biến đổi. Thủ tục lặp biến đổi Newton – Raphson trong bước thời gian từ $t \rightarrow t+\Delta t$ được mô tả trên hình 7 và được biểu diễn dưới dạng thuật toán như sau [7,8]:

1. Dữ liệu ban đầu: $\{U\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{U\}_t$, $\{f_s\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{f_s\}_t$, $\{\Delta R\}^{(1)} = \{\Delta \hat{R}\}$.

2. Tính toán cho mỗi bước lặp, $j = 1, 2, 3, \dots, m$

a. Giải phương trình: $[\hat{K}_t]\{\Delta U\}^{(j)} = \{\Delta R\}^{(j)} \Rightarrow \{\Delta U\}^{(j)}$.

b. $\{U\}_{t+\Delta t}^{(j)} = \{U\}_{t+\Delta t}^{(j-1)} + \{\Delta U\}^{(j)}$, $\{\Delta U\} = \sum_{j=1}^m \{\Delta U\}^{(j)}$.

c. Kiểm tra điều kiện hội tụ: $(\{\Delta U\}^{(j)})^T \{\Delta U\}^{(j)} / (\{\Delta U\}^T \{\Delta U\}) \leq \varepsilon$.

d. $\{\Delta f\}^{(j)} = \{f_s\}_{t+\Delta t}^{(j)} - \{f_s\}_{t+\Delta t}^{(j-1)} + ([\hat{K}_t] - [K_t])\{\Delta U\}^{(j)}$.

e. $\{\Delta R\}^{(j+1)} = \{\Delta R\}^{(j)} - \{\Delta f\}^{(j)}$.

3. Nếu điều kiện 2.3 không thỏa mãn (với ε – độ chính xác yêu cầu theo chuyển vị), thay thế j bởi $j + 1$ và tính toán lặp lại các bước từ 2.1 đến 2.5.

4. Nếu điều kiện 2.3 thỏa mãn, ta nhận được số gia chuyển vị từ bước thời gian t đến $t + \Delta t$:

$$\{\Delta U\}_t = \{\Delta U\}. \quad (16)$$

Giá trị $\{\Delta \dot{U}\}_t, \{\Delta \ddot{U}\}_t$, nhận được theo các phương trình sau:

$$\{\Delta \dot{U}\}_t = a_1 \{\Delta U\}_t - a_4 \{\dot{U}\}_t - a_5 \{\ddot{U}\}_t, \{\Delta \ddot{U}\}_t = a_1 \{\Delta U\}_t - a_2 \{\dot{U}\}_t - a_3 \{\ddot{U}\}_t. \quad (17)$$

Từ (16) và (17), kết hợp với (10) ta dễ dàng nhận được: $\{U\}_{t+\Delta t}, \{\dot{U}\}_{t+\Delta t}, \{\ddot{U}\}_{t+\Delta t}$. Từ đó xác định được giá trị nội lực của hệ tại thời điểm $t + \Delta t$:

$$\{S_{t+\Delta t}\}_m = [K_t]_m \{U_{t+\Delta t}\}_m + [M_t]_m \{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}_m + [C_t]_m \{\dot{U}_{t+\Delta t}\}_m - \{S_{t+\Delta t}^0\}_m, \quad (18)$$

Trong đó: $\{S_{t+\Delta t}\}_m = \{N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j\}_{t+\Delta t}^T$ – véc tơ nội lực của phần tử tại thời điểm $t + \Delta t$; $\{U_{t+\Delta t}\}_m, \{\dot{U}_{t+\Delta t}\}_m, \{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}_m$ – tương ứng là véc tơ chuyển vị, vận tốc và gia tốc các nút của phần tử thứ “ m ” tại thời điểm $t + \Delta t$; $[K_t]_m, [M_t]_m, [C_t]_m$: tương ứng là ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và ma trận cản của phần tử thứ “ m ” tại thời điểm t ; $\{S_{t+\Delta t}^0\}_m$ – véc tơ tải trọng quy nút của các lực tác dụng trong phần tử thứ “ m ” tại thời điểm $t + \Delta t$.

Sau mỗi bước tính toán theo thời gian cần kiểm tra trạng thái biến dạng tại đầu các phần tử để cập nhật lại các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, ma trận cản và véc tơ tải trọng của các phần tử phục vụ cho việc tính toán tại bước thời gian tiếp theo. Việc kiểm tra được dựa vào các quan hệ sau (xem hình 8):

- Nếu $ML(\theta) < M(\theta) < MU(\theta)$, ($\theta = \theta(t)$) thì trạng thái là ĐHTT;

- Nếu $M(\theta) \geq MU(\theta)$ và $\Delta M(\theta) > 0$ hoặc $M(\theta) \leq ML(\theta)$ và $\Delta M(\theta) < 0$ thì trạng thái là ĐDSTT;

- Nếu $M(\theta) \geq MU(\theta)$ và $\Delta M(\theta) < 0$ hoặc $M(\theta) \leq ML(\theta)$ và $\Delta M(\theta) > 0$ thì trạng thái đổi chiều trở lại ĐHTT.

Trong các quan hệ trên: $M(\theta)$ – mômen uốn tính toán tại thời điểm khảo sát; $MU(\theta)$ – giới hạn trên của mômen uốn tại thời điểm khảo sát là hàm cho trước, $MU(\theta) = pa\theta + (1-p)M_{pN}$; $ML(\theta)$ – giới hạn dưới của mômen uốn tại thời điểm khảo sát, $ML(\theta) = pa\theta - (1-p)M_{pN}$; $\Delta M(\theta)$ – số gia mômen uốn tính toán tại thời điểm khảo sát; *OS (overshooting)*: giới hạn chấy khi bước vào trạng thái ĐDSTT; *BT (backtracking)*: giới hạn khi quay trở lại trạng thái ĐHTT và *EL (Elastic linear)*: miền đàn hồi ĐHTT.

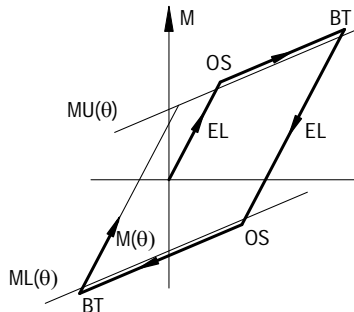
Dựa trên các thuật toán nhận được, tác giả lập chương trình giải bài toán trên máy tính bằng ngôn ngữ lập trình Matlab.

4. Thí dụ số

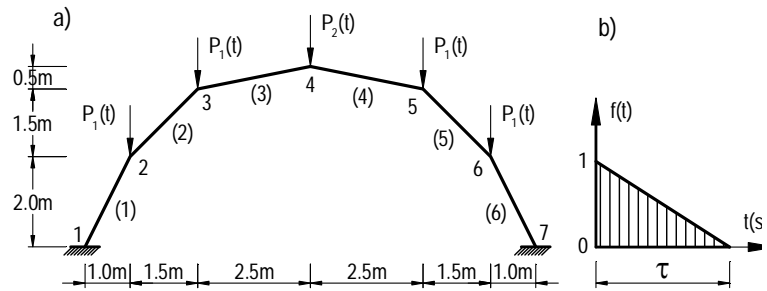
Sử dụng chương trình đã lập, xác định phản ứng động của khung dạng vòm ĐDSTT cho trên hình 9a có kể đến ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện. Kết cấu khung bằng thép, tiết diện chữ I và chịu uốn quanh trục chính.

Tiết diện ngang của các phân tử khung $I(300 \times 150 \times 6.5 \times 9 \text{ mm})$. Mô đun đàn hồi $E = 2.1e+5 \text{ MPa}$, ứng suất chảy dẻo $\sigma_p = 210 \text{ MPa}$. Tải trọng động ngắn hạn: $P_1(t) = 20f(t) \text{ kN}$, $P_2(t) = 280f(t) \text{ kN}$, trong đó $f(t)$ có dạng cho trên hình 9b. Thời gian duy trì tải trọng $\tau = 0.05 \text{ (s)}$, thời gian tính toán $t = 0.1 \text{ (s)}$, hệ số $p = 0.01$, tỷ số cản được chọn $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$, mặt dẻo của tiết diện lấy theo phương trình 6,7.

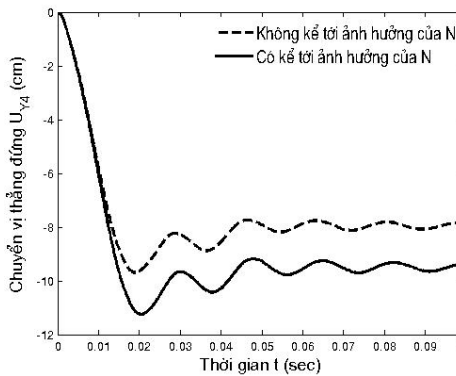
Trên hình 10 là đồ thị chuyển vị động thẳng đứng tại nút 4 và trên hình 11 là đồ thị mômen uốn động tại tiết diện 1 trong hai trường hợp: 1 – không kể đến và 2 – có kể đến ảnh hưởng của lực dọc N đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện.



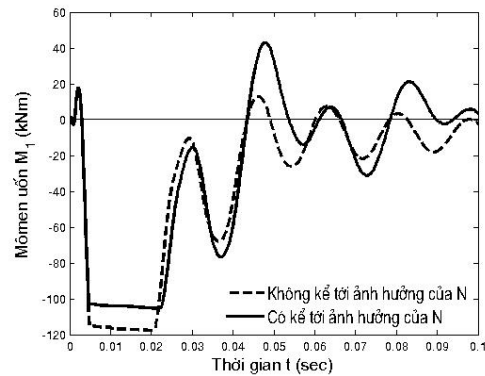
Hình 8. Sơ đồ kiểm tra trạng thái biến dạng của tiết diện



Hình 9. Sơ đồ kết cấu và dạng tải trọng động tác dụng



Hình 10. Đồ thị chuyển vị động thẳng đứng tại nút 4



Hình 11. Đồ thị mômen uốn động tại tiết diện 1

5. Nhận xét và kết luận

Từ các kết quả tính bằng số đối với khung phẳng ĐDSTT chịu tác dụng của tải trọng động, có thể đưa ra các nhận xét và kết luận sau đây:

- Việc kể đến ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện làm tăng chuyển vị (giá trị chuyển vị lớn nhất tại nút 4 lớn hơn gấp 1.16 lần) và làm giảm mômen (giá trị mômen lớn nhất tại tiết diện 1 nhỏ hơn 1.12 lần) trong kết cấu khung dầm – dèo so với trường hợp không kể đến ảnh hưởng trên;

- Ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái giới hạn dẻo của tiết diện trong nhiều trường hợp là đáng kể, do đó cần thiết phải kể đến ảnh hưởng này trong tính toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN TÚ. Tính toán hệ khung phẳng theo mô hình dầm – dèo song tuyến tính chịu tác dụng của tải trọng động. *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học các nhà nghiên cứu trẻ (Học viện KTQS), số IV/2009, trang 5–15.*
2. NGUYỄN VĂN TÚ, NGUYỄN VĂN HỘI. Tính toán kết cấu khung phẳng dầm – dèo chịu tác dụng của tải trọng động có kể đến hiệu ứng P-Δ và tính phi tuyến hình học của kết cấu. *Tạp chí Xây dựng, Bộ Xây dựng, số 11/2009, trang 81 – 85.*

3. BATHE, K.J., Finite Element Procedures (Part 1 – 2) , *Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, 1996.*
4. CHAN, S.L. and CHUI P.P.T., Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi – rigid Connections, *Elsevier Science Ltd., 2000.*
5. CHEN, W.F. and SOHAL I., Plastic Design and Second–Order Analysis of Steel Frames, *Springer – Verlag New York Inc., 1995.*
6. CHENG, F.Y., Matrix Analysis of Structural Dynamics, *Maxcel Dekker Inc., New York, 2000.*
7. CHOPRA, A.K., Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering (3rd Edition), *Prentice Hall International Inc., 2007.*
8. LI, G.Q. and LI, J.J., Advanced Anlysis and Design of Steel Frames, *John Wiley & Sons Ltd., England, 2007.*