TÍNH TỌA ĐỘ VUÔNG GÓC PHẲNG THEO PHÉP CHIẾU HÌNH TRỤ NGANG GIỮ GÓC DÙNG HÀM SỐ PHỨC

KS. **DIÊM CÔNG TRANG**
Viện KHCN Xây dựng
KS. **VŨ VĂN ĐOÀN**
Viện Quy hoạch và thiết kế nông nghiệp

1. Đặt vấn đề

Tính đổi tọa độ trắc địa (BL) thành tọa độ vuông góc phẳng (xy) là công việc quan trọng và thường xuyên trong trắc địa. Tọa độ vuông góc phẳng dùng trong trắc địa có ứng dụng rất rộng rãi. Nó xuất hiện ở tất cả các dạng công tác trắc địa công trình, nhất là khâu lập lưới khống chế mặt bằng phục phụ xây dựng công trình công nghiệp và dân dụng. Vì vậy, việc nghiên cứu áp dụng các dạng công thức tính đổi tọa độ trắc địa thành tọa độ vuông góc phẳng nhằm đạt hiệu suất cao và đảm bảo độ chính xác khi tính đổi là việc làm rất cần thiết.

Tất cả các công thức tính tọa độ vuông góc phẳng theo lưới chiếu hình trụ ngang giữ góc hiện dùng ở nước ta đều được xây dựng trên cơ sở khai triển hàm số mũ của chuỗi Taylor. Các công thức biểu diễn bằng hàm mũ có ưu điểm là dễ biểu diễn trực quan, nhưng bị hạn chế ở điểm khởi tính đạo hàm, số lượng, số hạng, tốc độ hội tụ cũng như số dư của chuỗi và độ chính xác luôn phụ thuộc vào độ rộng của múi chiếu. Hàm phức có rất nhiều điểm mạnh, các công thức dùng hàm phức khắc phục được các nhược điểm kể trên và đem lại hiệu quả cho việc áp dụng vào thực tế.

Trong báo cáo khoa học xây dựng hệ quy chiếu và hệ thống điểm tọa độ quốc gia VN-2000 cũng có giới thiệu công thức dùng hàm phức nhưng chưa có các bước tính khi tính thuận và tính ngược cụ thể.

Bài báo này giới thiệu công thức và các bước tính cụ thể để có thể áp dụng vào sản xuất.

2. Công thức tính

Như đã biết, phép chiếu Gauss-Kruger là phép chiếu thỏa mãn 3 điều kiện:

- Phép chiếu giữ góc;
- Sau khi chiếu kinh tuyến trục là đường thẳng;
- Sau khi chiếu kinh tuyến trục có chiều dài không đổi.

Cơ sở toán học để xây dựng các công thức mới dựa vào các điều kiện kể trên của phép chiếu.

2.1. Công thức hàm số phức cho phép chiếu Gauss khi tính thuận

Ta biết khi nói đến phép chiếu Gauss không thể không bàn đến độ vĩ đương lượng q và quan hệ của nó với độ vĩ trắc địa B.

Quan hệ này được biểu diễn qua công thức:

$$q = \int \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B}dB = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin B}{1-\sin B} - \frac{1}{2}e\ln\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B} \qquad (1)$$
$$= \operatorname{arctan}h(\sin B) - e\operatorname{arctan}h(e\sin B)$$

Nếu đặt $w=q+il$ là cách biểu diễn quan hệ giữa độ vĩ đương lượng và hiệu độ kinh và đặt $z=x+iy$ là hàm phức của tọa độ vuông góc phẳng, trong đó $i=\sqrt{-1}$. Nếu đặt f là một hàm giải tích tùy ý, từ lý luận của hàm phức, ta được hàm giải tích luôn thỏa mãn điều kiện giữ góc, cho nên điều kiện (1) của phép chiếu Gauss sẽ có công thức toán học như sau:

$$z = x + iy = f(w) = f(q+il) \qquad (2)$$

Từ điều kiện (2) của phép chiếu Gauss, khi l=0 thì y=0 nên hàm (2) chỉ có bộ phận thực là: $x = f(q)$ (3)

Từ điều kiện (3) của phép chiếu ta có công thức (3) chính là công thức tính chiều dài trên cung kinh tuyến, đó là:

$$x = X(B) = a(1-e^2)\int_0^B \frac{dB}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} \qquad (4)$$
$$= a(1-e^2)(\alpha B + \beta\sin 2B + \gamma\sin 4B + \delta\sin 6B + \varepsilon\sin 8B + \cdots)$$

Trong công thức trên *a* là bán trục lớn của ellipsoid quy chiếu, các hệ số trong công thức (4) được tính theo công thức sau:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{llllll}1 & +\frac{3}{4}e^2 & +\frac{45}{64}e^4 & +\frac{175}{256}e^6 & +\frac{11025}{16384}e^8 & +\cdots\\ & -\frac{3}{8}e^2 & -\frac{15}{32}e^4 & -\frac{525}{1024}e^6 & -\frac{2205}{4096}e^8 & -\cdots\\ & & \frac{15}{256}e^4 & +\frac{105}{1024}e^6 & +\frac{2205}{16384}e^8 & +\cdots\\ & & & -\frac{35}{3072}e^6 & -\frac{105}{4096}e^8 & +\cdots\\ & & & & \frac{315}{131072}e^8 & +\cdots\end{array}\right) \tag{5}$$

Rõ ràng là công thức (1) quy định quan hệ hàm số giữa độ vĩ trắc địa và độ vĩ đương lượng, nếu như ta triển khai độ vĩ đương lượng *q* theo hàm số phức $w=q+il$ thì độ vĩ ban đầu cũng biến thành hàm phức và gọi nó là độ vĩ số phức biểu thị bằng ệ.

Cũng từ công thức (1) sau khi có độ vĩ trắc địa ta có thể viết ra công thức tính ệ như sau:

$$\Phi=\arcsin\left[\tan h\left(w+e\arctan h(e\sin\Phi)\right)\right] \quad (6)$$

Nhìn vào công thức (6) ta thấy, hai vế của nó đều chứa ệ nên phải tính nhích dần. Quá trình tính nhích dần có thể biểu diễn qua công thức sau:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_0\approx\arcsin\left[\tan h(w)\right]\\ \Phi_i=\arcsin\left[\tan h\left(w+e\arctan h(e\sin\Phi_{i-1})\right)\right]\end{array}\right\} \quad (7)$$

Trong công thức trên $ệ_0$ là trị ban đầu, $ệ_{i-1}$ và $ệ_i$ là các giá trị tính nhích dần lần thứ (i-1) và lần thứ i. Vì độ lệch tâm của elipsoid trái đất rất nhỏ cho nên chuỗi chứa e^2 hội tụ rất nhanh, thường chỉ cần tính đến lần thứ ba là đạt yêu cầu. Đem độ vĩ số phức tính được thay vào công thức (4) ta có:

$$\begin{aligned}z=x+iy&=a\left(1-e^2\right)\int_0^{\Phi}\frac{d\Phi}{\left(1-e^2\sin^2\Phi\right)^{3/2}}\\ &=a\left(1-e^2\right)\left(\alpha\Phi+\beta\sin2\Phi+\gamma\sin4\Phi+\delta\sin6\Phi+\varepsilon\sin8\Phi+\cdots\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Công thức (6) và công thức (8) dùng để tính phần thuận của phép chiếu Gauss và có thể giải thích như sau:

- *W* quyết định độ vĩ số phức ệ, độ vĩ số phức ệ lại quyết định tọa độ vuông góc phẳng, tất cả đều là quan hệ hàm sơ cấp đơn trị thỏa mãn điều kiện giữ góc nên đã thỏa mãn điều kiện (1) của phép chiếu Gauss.
- Khi hiệu độ kinh l=0 bộ phận số hư y=0; thì công thức (8) quy về công thức (4) và ta có công thức tính chiều dài trên cung kinh tuyến thỏa mãn điều kiện (2) và điều kiện (3) của phép chiếu Gauss.

2.2. Công thức hàm số phức cho phép chiếu Gauss khi tính ngược

Công thức tính ngược trên nguyên tắc có thể dựa vào công thức (8) để chứng minh và liên quan đến việc tính ngược chiều dài cung kinh tuyến ra độ vĩ. Ta biết độ vĩ trắc địa có thể tính theo công thức:

$$B=\varphi+a_2\sin2\varphi+a_4\sin4\varphi+a_6\sin6\varphi+a_8\sin8\varphi \tag{9}$$

Trong đó: $\varphi=\dfrac{X(B)}{a\left(1-e^2\right)\alpha}$ (10)

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}e^2 & +\frac{3}{16}e^4 & +\frac{213}{2048}e^6 & +\frac{255}{4096}e^8 \\ & \frac{21}{256}e^4 & +\frac{21}{256}e^6 & +\frac{533}{8192}e^8 \\ & & \frac{151}{6144}e^6 & +\frac{151}{4096}e^8 \\ & & & \frac{1097}{131072}e^8 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Nếu đặt độ vĩ phức của điểm chân đường vĩ tuyến là ỉ, thì ỉ tính theo công thức:

$$\Psi = \frac{x+iy}{a\left(1-e^2\right)\alpha} \qquad (12)$$

Đem ỉ thay vào vị trí của ử trong công thức (10) và lắp vào công thức (9) ta có công thức tính ệ:

$$\Phi = \Psi + a_2 \sin 2\Psi + a_4 \sin 4\Psi + a_6 \sin 6\Psi + a_8 \sin 8\Psi \qquad (13)$$

Sau khi tìm được ệ, đem ệ thay vào (6) và tính được:

$$w = q + il = \arctan h(\sin\Phi) - e \arctan h(e \sin\Phi) \qquad (14)$$

Sau khi tìm được q từ công thức (1) ta giải được:

$$B = \arcsin\left[\tan h\left(q + e \arctan h\left(e \sin B\right)\right)\right] \qquad (15)$$

Vì hai vế của công thức (15) đều chứa B nên cũng phải tính nhích dần theo công thức sau:

$$\left.\begin{aligned} B_0 &\approx \arcsin\left[\tan h(q)\right] \\ B_i &= \arcsin\left[\tan h\left(q + e \arctan h\left(e \sin B_{i-1}\right)\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Trong công thức trên B_0 là giá trị ban đầu, B_{i-1}, B_i là độ vĩ trắc địa tính được ở bước thứ i-1 và bước thứ i. Vì e^2 là số nhỏ nên chuỗi cũng hội tụ nhanh và cũng chỉ cần tính nhích dần đến lần thứ ba. Có thể coi công thức (12) đến công thức (15) là công thức tính ngược của phép chiếu Gauss. Cũng tiến hành tương tự như trên ta có thể thấy:

- Công thức (13), (14), (15) cũng là các hàm giải tích đơn trị nên từ $z=x+iy$ đến $w=q+il$ cũng là phép chiếu giữ góc thõa mãn điều kiện (1) của phép chiếu Gauss.

- Khi y=0 công thức (12) có ý nghĩa như công thức (10), tức là ỉ= ử, công thức (13) khôi phục dạng công thức (9), lúc đó l=0, giải ra được B là độ vĩ trắc địa trên kinh tuyến trục, thỏa mãn điều kiện (2) và (3) của phép chiếu Gauss.

2.3. Dạng hàm phức của công thức tính tỷ lệ chiều dài và góc hội tụ kinh tuyến

Tỷ lệ chiều dài và góc hội tụ kinh tuyến theo ý nghĩa toán học đều là hàm giải tích ở một điểm nào đó nên có thể lấy đạo hàm. Nếu ta đặt:

$$z' = \frac{df(w)}{rdw} \qquad (17)$$

Trong đó: $r = N\cos B = \dfrac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$ (18)

Công thức (17) có dạng cụ thể hơn:

$$z' = \frac{df(w)d\Phi}{rd\Phi\, dw} \qquad (19)$$

Nếu lấy đạo hàm của công thức (8) và công thức (14) ta có công thức:

$$\frac{df(w)}{d\Phi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\Phi\right)^{3/2}} \qquad (20)$$

$$\frac{dw}{d\Phi} = \frac{\left(1-e^2\right)}{(1-e^2\sin^2\Phi)\cos\Phi} \qquad (21)$$

Đem công thức (18), (20), (21) thay vào công thức (19) ta được công thức sau:

$$z' = \frac{\cos\Phi\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}} \qquad (22)$$

Nếu đem công thức trên biểu diễn theo hàm lượng giác ta có:

$$z' = m(\cos\gamma - i\sin\gamma) = \frac{\cos\Phi\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}} \quad (23)$$

Từ định nghĩa đạo hàm của hàm phức ta có *m* là tỷ lệ chiếu, ó là góc độ hội tụ kinh tuyến. Trong công thức (23) nếu ta cho dấu "-" sẽ quy định là hướng thuận của hàm phức (ngược chiều kim đồng hồ), sẽ ngược với dấu của góc hội tụ kinh tuyến trong phép chiếu Gauss (tính thuận theo chiều kim đồng hồ). Công thức (23) là công thức khép kín giữa tỷ lệ chiếu và góc hội tụ kinh tuyến cũng có dạng rất gọn.

3. Ví dụ

3.1. Tính theo hàm số phức

Ta lấy elip quy chiếu là Krasovxki có:
a= 6378245 m ; e^2=0.006693421623; f= 1/ 298.3

Lấy điểm tính có B= 21^0; l= 2^0 để tính theo các công thức giới thiệu ở trên.

3.1.1. Công thức hàm số phức cho phép chiếu Gauss khi tính thuận

Đầu tiên từ độ vĩ trắc địa *B* ta tìm được độ vĩ đương lượng *q*:

$$q = \arctan h\left[\sin\frac{\pi}{4} - e\arctan h\left(e\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.3726 \quad (24)$$

Sau đó cùng với hiệu độ kinh *l* ta tìm được dạng hàm phức *w*:

$$w = q + il = 0.3726 + 2\cdot\frac{\pi}{180}\cdot i \quad (25)$$

Coi *e*= 0 từ công thức (7) ta tính được trị gần đúng của độ vĩ số phức ệ$_0$:

$$\Phi_0 \approx \arcsin[\tan h(w)] = 0.36448 + 0.032621\text{i} \quad (26)$$

Kết quả tính lặp 3 lần như sau:

$$\Phi_1 = 0.3667147 + 0.03278389\text{i}$$

$$\Phi_2 = 0.3667278 + 0.03278452i$$

$$\Phi_3 = 0.36672787 + 0.03278452i$$

Nếu có tính lặp lần nữa thì ở vị trí số lẻ thứ 10 không có sự thay đổi nên chỉ cần tính lặp đến lần thứ 3. Đem kết quả tính được thay vào công thức (8) ta có:

$$z = 2324419.4925419 + 207975.913763983\text{i}(\ /m) \quad (27)$$

Trong công thức 27 phần thực là tung độ, phần ảo là hoành độ trong tọa độ Gauss.

Vậy tọa độ của điểm tính là:

x= 2324419.493; y= 707975.914

3.1.2. Công thức hàm số phức cho phép chiếu Gauss khi tính ngược

Đầu tiên ta tính được:

$$\Psi = \frac{x+iy}{a(1-e^2)\alpha} = 0.365041+0.032662\text{i} \quad (28)$$

Thay (28) vào công thức (13) ta tính được độ vĩ số phức:

$$\Phi = \Psi + a_2\sin 2\Psi + a_4\sin 4\Psi + a_6\sin 6\Psi + a_8\sin 8\Psi$$
$$= 0.3667279+0.0327845\text{i} \quad (29)$$

Đem (29) thay vào (14) ta tính được độ vĩ số phức:

$$w = q + il = 0.3726127+0.03490659\text{i} \quad (30)$$

Phần thực của *w* là vĩ độ đương lượng *q*, trong công thức (15) nếu coi *e*=0 ta được trị ban đầu của độ vĩ trắc địa B_0:

$$B_0 = \arcsin[\tan h(0.3726127)] = 0.364278 \quad (31)$$

Tiếp tục tính nhích dần ta được:

B1= 0.3665060521; *B2*= 0.3665060521; *B3*= 0.3665060521

Do vậy B=B_3*180/∏=21^0; l=l*180/∏=2^0

3.1.3. Tính tỷ lệ chiều dài và góc hội tụ kinh tuyến

Đem độ vĩ số thực và độ vĩ số phức thay vào công thức (22) ta được đạo hàm của *z* là *z'*:

$$z' = m(\cos\gamma - i\sin\gamma) = \frac{\cos\Phi\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}} = 1.000456-0.01252\text{i} \quad (32)$$

Trong đó phần modul chính là tỷ lệ chiếu:
m=|z'|=1.00053, phần góc lấy ngược dấu chính là góc hội tụ kinh tuyến: ó = -arg(z') = 0.71699
So sánh với công thức cũ là:

$$m = 1 + \frac{l^2}{2}\cos^2 B(1 + e'^2\cos^2 B) + \frac{l^4}{24}\cos^4 B(5 + 4\tan^2 B) = 1.00053 \qquad (33)$$

$$\gamma = l\sin B\left[1 + \frac{l}{3}\cos^2 B(1 + 3e'^2\cos^2 B + 2e'^4 B)\right] = 0.71699 \qquad (34)$$

3.2. Tính theo phần mềm Geotool của Trung tâm thông tin lưu trữ tư liệu Địa chính dùng hàm số mũ

Tính điểm M1 có: B= 21^0; l= 2^0
Parameters:
Ellipsoid: KRASOVSKI
Project: GAUSS
Center meridian: 105 degree 00 minute
Zone: 6 degree

Name	ID	B	L	x	y
1	M1	210000.000	1070000.000	2324419.495	707975.914

3.3. So sánh kết quả

Công thức tính đổi	B	L	x	y
Dùng hàm số phức	$21^0$00'00''	$107^0$00'00''	2324419.493	707975.914
Dùng Geotool	210000.000	1070000.000	2324419.495	707975.914
Sai lệch			0.002	0

Từ bảng so sánh kết quả tính toán ở ví dụ trên ta có nhận xét sau:
- Dùng hàm số phức khi tính thuận và tính ngược đều cho ta kết quả giống như tính theo Geotool.
- Dùng hàm số phức tính nhanh gọn hơn

4. Kết luận

- Công thức tính của phép chiếu Gauss viết dưới dạng hàm số phức có dạng rất gọn, hiệu suất tính cao, nhiều công thức trong một công thức có được hai đại lượng cần tính;
- Nếu coi mặt elip là mặt cầu thì dạng công thức càng đơn giản hơn;
- Nếu dùng phép chiếu UTM thì tương tự như cách tính cũ và chỉ cần thay m=1 bằng 0,9996 hoặc 0,9999 ta sẽ có công thức tính tọa độ UTM cho múi 6^0 hoặc 3^0. Rất thuận tiện cho các mạng lưới chuyên dùng ứng dụng trong trắc địa công trình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HOÀNG NGỌC HÀ, TRƯƠNG QUANG HIẾU. Cơ sở toán học xử lý số liệu trắc địa. *Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Hà Nội, 1999.*
2. PHẠM HOÀNG LÂN, NGUYỄN VĂN CHÂU. Giáo trình trắc địa mặt cầu. *Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Hà Nội, 1999.*
3. HOÀNG NGỌC HÀ. Bình sai tính toán lưới trắc địa và GBS. *Hà Nội, 1998.*
4. Tổng cục địa chính, Xây dựng hệ quy chiếu và hệ toạ độ quốc gia. *Báo cáo khoa học, Hà Nội, 1999.*
5. Phần mềm GeoTools 1.2, *Trung tâm thông tin-Lưu trữ tư liệu địa chính, Bộ Tài nguyên và Môi trường.*